

«Μαθηματικά, μια απ' τις μείζονες δυνάμεις που γέννησαν το σύγχρονο κόσμο...»

Μέρος Πρώτο

Γεώργιος Δ. Καρατάσιος

Μαθηματικός – Δρ. Πολυτεχνικής Σχολής Α.Π.Θ.

*Περιφερειακός Διευθυντής Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
Κεντρικής Μακεδονίας*

Ελένη Δαλακύρου

Εκπαιδευτικός

1. Τα μαθηματικά ως πρωτοπόρος κλάδος στην επιστημονική έρευνα και η μακρόχρονη ιστορία εμπλοκής τους στην εξέλιξη του ανθρώπινου πολιτισμού

Η προσπάθεια αυτή, να εκπονηθεί μια εργασία επικεντρωμένη στον πυρήνα του πολιτισμού και, βέβαια, στη συνεχή αλληλεπίδραση ανάμεσα στη μαθηματική σκέψη και σε όλες τις άλλες δραστηριότητες του ανθρώπου, γίνεται για να δείξουμε το σημαντικό και καθοριστικό ρόλο των μαθηματικών σε κάθε τομέα της ζωής. Να επισημάνουμε τη χρησιμότητά τους για την κατανόηση και την επίλυση των προβλημάτων της σύγχρονης επιστήμης και τεχνολογίας.

Οι επιστήμες και ιδιαίτερα τα μαθηματικά ποτέ δε διέθεταν την αστραφτερή δημιουργία εικόνας που έχουν οι τέχνες και έτσι δεν αιχμαλώτιζαν τις καρδιές και τη σκέψη των ανθρώπων με τον ίδιο τρόπο. Κάποια αλληλεπίδραση έχει ήδη υπάρξει, καθώς κάποια εντελώς ξεχωριστά θέματα ή προβλήματα, φορτωμένα με κάποια μυθολογία, είναι δυνατό να αγγίζουν τον κόσμο που βρίσκεται έξω από τη μαθηματική κοινότητα. Για παράδειγμα, όταν η θεωρία συνόλων άρχισε να διδάσκεται στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, έννοιες όπως η σχετικότητα, η τεχνητή νοημοσύνη, η κβαντική μηχανική, το θεώρημα της μη πληρότητας, το «τελευταίο πρόβλημα του Fermat», από τον A. Wiles, που έγινε πρωτοσέλιδο στις εφημερίδες *Le Monde* και *New York Times*, μας απασχόλησαν για κάποιο χρονικό διάστημα ή έχουν γίνει αναπόσπαστο μέρος του σύγχρονου τρόπου ζωής. Η χρήση δε των υπολογιστών έχει κάνει την ομορφιά των μαθηματικών προσιτή σε όλους. Ακόμη και σήμερα η πλειονότητα εξακολουθεί να συνδέει τα μαθηματικά με το σχολείο και τίποτε άλλο. Βέβαια, τα μαθηματικά δεν είναι και ούτε πρέπει να μείνουν στη συλλογική συνείδηση μόνο ως ένα σύνολο αριθμητικών τεχνασμάτων που τα μαθαίνουμε στο σχολείο

και μόλις ενηλικιωθούμε τα ξεχνάμε! Έχουν μακρόχρονη ιστορία εμπλοκής στην εξέλιξη του ανθρώπινου πολιτισμού, ιστορία που διαρκεί τουλάχιστον πέντε χιλιάδες χρόνια. Τα μαθηματικά ήταν και παραμένουν μια συλλογική δραστηριότητα ενός σχετικά μικρού αριθμού εξαιρετικά προικισμένων ατόμων, καθένας από τους οποίους έβαλε τον ακρογωνιαίο λίθο του, και αγνοώντας τους περιορισμούς του χώρου και του χρόνου επικοινωνούν μεταξύ τους δημιουργώντας ένα από τα θαύματα του κόσμου· μια επιστήμη που πλέον θεωρείται πρωτοπόρος στην επιστημονική έρευνα, κεντρικός μοχλός στην ανάπτυξη και παράγοντας πολιτισμού.

Το ότι το ευρύ κοινό εξακολουθεί να έχει μια συμβατική και συντηρητική άποψη για το τι είναι μαθηματικά πιθανόν να πηγάζει από τον τρόπο με τον οποίο οι άνθρωποι βίωσαν τα μαθηματικά ως μαθητές στη βασική τους εκπαίδευση. Το σύστημα ανατροφοδοτεί μια τέτοια κατάσταση, καθώς οι εκπαιδευτικοί διδάσκουν τα μαθηματικά με τον ίδιο περίπου τρόπο που και αυτοί τα δίδαχτηκαν, σαν ένα σύνολο κανόνων και αξιωμάτων που έχουν μια θεωρητική αλληλουχία (την οποία όλοι αποδέχονται λεκτικά, αλλά στην πραγματικότητα κανείς δεν τη βλέπει, ούτε ίσως και οι συγγραφείς των εγχειριδίων). Αυτό το γεγονός, όμως, έχει συντελέσει στη δημιουργία ενός συγκεκριμένου πολιτισμικού καθεστώτος και μιας παράδοσης στη μαθηματική εκπαίδευση.

Τα τελευταία τριάντα χρόνια η Διδακτική των Μαθηματικών ασχολείται με τρόπους προσέγγισης της διδακτικής δραστηριότητας που στηρίζονται κυρίως στα ερευνητικά αποτελέσματα της γνωστικής ψυχολογίας για την μάθηση και την δόμηση της γνώσης. Παράλληλα, συνδέει τα μαθηματικά με πραγματικές καταστάσεις και δίνει έμφαση στις ιδέες και στις σκέψεις των παιδιών καθώς και στους τρόπους μέσα από τους οποίους αυτές οι ιδέες δομούνται. Εξετάζονται οι δυνατότητες για αλλαγή του παραδοσιακού καθεστώτος προς κριτικές και, βέβαια, ριζοσπαστικές ιδέες για τη φύση των μαθηματικών και τη σχέση του μαθητή –και του ανθρώπου– με αυτά.

Αντικείμενο των μαθηματικών δεν είναι τα δυσνόητα σύμβολα. Είναι οι ιδέες: ιδέες για το χώρο, το χρόνο τους αριθμούς, τις σχέσεις, και όλες οι ιδέες γεννιούνται από εικόνες του νου! Με τη συνεχώς αυξανόμενη ισχύ των υπολογιστών τα μαθηματικά αναβαθμίστηκαν σε εικονιστική επιστήμη. Προφανώς, τώρα γεννιέται μια καινούρια αισθητική που συνδυάζει τη μαθηματική ακρίβεια με την αισθητική ευαισθησία.

Η πρωτοτυπία των μαθηματικών απορρέει από την αδιαφορία τους σχετικά με την ύπαρξη ή την ανυπαρξία του αντικείμενου τους: η ανάλυση των αρχαίων γεωμετρών, απογυμνωμένη από τη θεώρηση σχημάτων, που κουράζει τη φαντασία, και η άλγεβρα των σύγχρονων, απαλλαγμένη από την ιδιαιτερότητα των αριθμών, συναντώνται όχι τόσο γιατί τα αριθμητικά και τα γεωμετρικά στοιχεία είναι πράγματι όμοια, αλλά μάλλον γιατί οι γνωστικοί κλάδοι που καταγίνονται με αυτά ανάγονται σε μια ίδια μέθοδο: «για να οδηγήσει ορθά το νου και να αναζητήσει την αλήθεια μέσα στις επιστήμες»¹. Η γονιμότητα των μαθηματικών πη-

1 Τίτλος του Λόγου της Μεθόδου, του Descartes

γάζει από την πιθανή τους χρήση ως καθολικής μεθόδου για την γνώση των υπαρχόντων πραγμάτων, γιατί η πρακτική της αναλυτικής γεωμετρίας είναι και συνάμα θεωρία μιας νέας λογικής, που παίρνει τη θέση της διαλεκτικής που διδάσκεται στη Σχολή.² Η εμπειρία είναι για τον Γαλιλαίο ένα δευτερεύον στοιχείο και έχει σημασία μονάχα δεμένη με την κίνηση της έλλογης επιχειρηματολογίας, που κανόνας της είναι τα μαθηματικά. Ο Γαλιλαίος συνόψισε αυτή την άποψή του σε ένα περίφημο κείμενο, το *Saggiatore*:

«Η φιλοσοφία είναι γραμμένη μέσα σε αυτό το μεγάλο βιβλίο που είναι διαρκώς ανοιχτό μπροστά στα μάτια μας (εννοώ το σύμπαν) και δεν μπορούμε να το κατανοήσουμε αν πρωτύτερα δε μάθουμε να διαβάζουμε τη γλώσσα και τα γράμματα με τα οποία έχει γραφτεί. Αλλά είναι γραμμένο σε μαθηματική γλώσσα και τα γράμματα είναι το τρίγωνο, ο κύκλος και άλλα γεωμετρικά σχήματα χωρίς τα οποία είναι ανθροπίνως αδύνατο να καταλάβουμε έστω και μια λέξη...»

(Έργα, πρώτος τόμος, σελ. 232).

Ένα μεγάλο μέρος των πρώιμων μαθηματικών (στην Αίγυπτο, τη Μεσοποταμία, την Κίνα, την Ινδία, το Περσέ) αναπτύχθηκε για το εμπόριο και τη γεωργία, αλλά υπήρχε και κάποια σχέση με θρησκευτικές πρακτικές και με την κίνηση των ουρανών, μια που η κατασκευή ημερολογίων ήταν στην ουσία δουλειά αστρονόμων-ιερέων και η χαρτογράφηση του ουρανού χρειαζόταν ειδικά μαθηματικά για να αναπτυχθεί. Στην πραγματικότητα, μέσω της αστρονομίας και της αστρολογίας ή κοσμολογίας, ο ουρανός άσκησε τη μεγαλύτερη επίδραση στην εξέλιξη των μαθηματικών! Τα φωτισμένα μυαλά όλων των τότε πολιτισμών –η ανθρώπινη επινοητικότητα– μας άφησαν κληρονομιά αξιόλογα συγγράμματα και επινόησαν χρήσιμες μηχανικές εφαρμογές και εφευρέσεις. Τα νήμα στον καμβά της ανθρώπινης ιστορίας, που είναι αξεδιάλυτα πλεγμένο και με το νήμα της αρχαίας ελληνικής διανόησης, με τα γνωστά σε όλο τον κόσμο επιτεύγματα, θα ξετυλιχθεί στις επόμενες σελίδες.

Όταν το 529 μ.Χ. ο χριστιανός Ρωμαίος αυτοκράτορας Ιουστινιανός έκλεισε τις ειδωλολατρικές φιλοσοφικές σχολές και ανάμεσά τους και την Ακαδημία των Αθηνών, χίλια χρόνια ελληνικών μαθηματικών πήραν τέλος και πολλοί λόγιοι τράβηξαν ανατολικά για την πνευματικά ακμαιότερη Περσική Αυτοκρατορία. Διακόσια χρόνια πριν, ο Μέγας Κωνσταντίνος είχε καταστήσει το Χριστιανισμό επίσημη θρησκεία του ρωμαϊκού κόσμου και είχε μεταφέρει το κέντρο της εξουσίας από τη Ρώμη στην Κωνσταντινούπολη. Οι πνευματικές και κοσμικές δυνάμεις για λίγο συνενώθηκαν στον πρώτο αυτοκράτορα της Αγίας Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας, τον Καρλομάγνο (742-814). Τότε η Κωνσταντινούπολη ήταν τμήμα της ανερχόμενης Βυζαντινής Αυτοκρατορίας και η Βαγδάτη η επισημονική πρωτεύουσα του κόσμου. Ο ρόλος των Αράβων στη διατήρηση και εξάπλωση των μαθηματικών εκείνα τα χρόνια ήταν καθοριστικός. Η μαθηματική

2 Επιστολή του Descartes στον Regins (24 – Μαΐου 1640)

γνώση των λαών –διάφορων χωρών, όπως η Ινδία, η Κίνα– καθώς και του αρχαίου ελληνικού και ελληνιστικού κόσμου αναζητήθηκε από Άραβες σοφούς, μεταφράστηκε, αξιολογήθηκε και αποτέλεσε αντικείμενο σύνθεσης και ανάπτυξης σε διάφορα κέντρα μάθησης, όταν οι Χαλίφηδες των Αβασσιδών (750 μ.Χ.) θέλησαν να χτίσουν την καινούρια Αλεξάνδρεια στη Βαγδάτη και φρόντισαν να γίνει η τεράστια μεταφραστική προσπάθεια για την απόδοση στα αραβικά όλης της πολύτιμης γνώσης που υπήρχε εκείνη την εποχή. Η γνώση αυτή, λοιπόν, μέσω της Περσίας μεταφέρεται στη Βαγδάτη, στο Κάιρο και τελικά στο Τολέδο και την Κόρδοβα, πρωτεύουσα του ιβηρικού αραβικού κράτους της Ισπανίας. Σοφοί από όλη την Ευρώπη έρχονταν στην Κόρδοβα και το Τολέδο για την αναζήτηση της αρχαίας και σύγχρονης γνώσης. Έγιναν αμφίδρομες μεταφράσεις μεταξύ αραβικών, λατινικών, ελληνικών, εβραϊκών και κασιλιάνικων. Για την Ευρώπη αυτή υπήρξε μια περίοδος ανάκτησης των χαμένων ελληνικών μαθηματικών και των πρωτότυπων αραβικών και ινδικών ανακαλύψεων. Αυτές οι μεταφράσεις δεν άργησαν να ξυπνήσουν τη διάθεση για απόκτηση νέων γνώσεων. Πλέον τα σημαντικότερα κέντρα σπουδών έγιναν το Παρίσι και η Οξφόρδη. Η επιστημονική μέθοδος, που βρισκόταν ακόμα στα σπάργανα, θα έδινε στα μαθηματικά ρόλο πρωταγωνιστή.

Οι αραβικοί αριθμοί, αν και πέρασαν στην Ευρώπη το 10^ο αιώνα, δεν είχαν διαδοθεί ως το 13^ο αι. Κατά το 14^ο αι. εμφανίστηκαν ειδικά σχολεία αριθμητικής για όσους ήθελαν να διδαχτούν την αριθμητική του εμπορίου. Η ύπαρξη τέτοιων σχολείων μαρτυρά το πόσο σημαντικά άρχισαν να θεωρούνται τα μαθηματικά και η υπολογιστική ικανότητα για την άσκηση του εμπορίου. Με την εντατικοποίηση των εμπορικών δραστηριοτήτων, την ανάπτυξη της ναυτιλίας και την εφεύρεση της τυπογραφίας –που βοήθησε και στην καθιέρωση κοινά αποδεκτών συμβόλων– μπορούσε αυτή η γνώση να μεταδοθεί πλέον στον κοινό άνθρωπο. Δεν περιορίζονται τα μαθηματικά πια σε λίγους ευγενείς ή ακαδημαϊκούς ακόμη καλυπτόμενα κάτω από μυστικοπαθή μανδύα.

Η Ευρώπη του 16^{ου} αιώνα υποσχόταν άπειρες δυνατότητες. Έστρεψε το βλέμμα και στον υπόλοιπο κόσμο, οπότε άρχισαν να γίνονται όλο και περισσότερα ταξίδια εξερεύνησης, κατάκτησης και εμπορίου. Η ναυσιπλοΐα χρειαζόταν ακριβείς χάρτες των θαλασσών και του ουρανού, και το εμπόριο μια αποτελεσματική μορφή λογιστικής. Η άλγεβρα, η τριγωνομετρία, οι γεωμετρικές προβολές, οι λογάριθμοι και ο απειροστικός λογισμός θα αρχίσουν να εμφανίζονται σιγά σιγά και μαζί με αυτά και οι μεγάλες ανακαλύψεις. Τα γραπτά του Βάκωνα –που είχε, όπως ο Πλάτωνας, τεράστια επίδραση στη φιλοσοφία της επιστημονικής δραστηριότητας– για την προαγωγή της μάθησης και την αρωγή της επιστήμης στην αύξηση της ευημερίας και του κοινού πλούτου –όπου τα μαθηματικά ήταν η γλώσσα της και ένα εργαλείο στη διάθεσή της– επηρέασαν μελλοντικούς επιστήμονες, όπως ο Νεύτωνας και ο Χάλλεϋ, έθεσαν τις βάσεις της αγγλικής συνεισφοράς στην επιστημονική επανάσταση και ενέπνευσαν την ίδρυση της Βασιλικής Εταιρείας. Η προώθηση των μαθηματικών δεν ήταν πια απασχόληση κάποιων πανεπιστημιακών δασκάλων, αλλά συστράτευση για

έναν εθνικό σκοπό. Ο Κοπέρνικος (1473-1543) αποκαλύπτει το ηλιοκεντρικό σύστημα, που πήρε το όνομά του, ο Γαλιλαίος (1564-1642) για την μελέτη φυσικών φαινομένων ανέπτυξε μαθηματικές θεωρίες, ο Ντεκάρτ (Καρτέσιος 1596-1650) διατυπώνει κανόνες ορθολογισμού για την έρευνα και δημιουργεί την αναλυτική γεωμετρία, που μελέτησε και συμπλήρωσε ο Φερμά (1601-1665), η ανακάλυψη της Αμερικής από τον Κολόμβο, ο δρόμος για την Ανατολή γύρω από την Αφρική, ο γύρος του κόσμου από τον Μαγγελάνο και μια σειρά ακόμη από ανακαλύψεις και εφευρέσεις, όπως η εφεύρεση της ατμομηχανής από τον Βαπτ, η ηλεκτροτεχνία από τους Βόλτα, Φαρανταίη, Άμπερ και Μάξγουελ στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία, των Χέρτζ και Μαρκόνι: τηλέφωνο, ασύρματο, ραντάρ, ραδιόφωνο, τηλεόραση, προωθούν τα μαθηματικά με νέους κλάδους (Ανάλυση, Διαφορικές Εξισώσεις) και οδηγούν στην ανάπτυξη της Δυτικής Ευρώπης. Δημιουργούνται ισχυρά κράτη που αναπτύσσουν ανταγωνισμό μεταξύ τους, όπως η διαμάχη για τη θαλασσοκρατία ανάμεσα στην Ισπανία και τη Μεγάλη Βρετανία, οι πόλεμοι μεταξύ Γαλλίας και Γερμανίας κ.ά. Όλα αυτά είχαν στόχο τα οικονομικά συμφέροντα, το εμπόριο που θα αναπτύξει κάθε χώρα στο εσωτερικό της και στις άλλες χώρες, αλλά κυρίως στις αποικίες, που κάθε κράτος προσπαθούσε να καταπατήσει στις άλλες ηπείρους (Ασία, Αφρική, Αμερική και Αυστραλία). Για να επιτευχθούν αυτοί οι σκοποί, ιδρύονται τράπεζες, μεγάλες εταιρείες εφοπλιστικές, ασφαλιστικές κ.ά., σχολεία γενικής μόρφωσης και πανεπιστήμια. Δημιουργούνται νέοι κλάδοι: λογιστικής και οικονομικών μαθηματικών, στατιστικής και θεωρίας πιθανοτήτων. Ο μαθηματικός Πασκάλ βελτιώνει τα παλιά αβάνκια και τα εξελίσσει σε αριθμητικές μηχανές, και ασχολείται με λοταρίες και λαχεία. Ο Φερμά προωθεί τα μαθηματικά, ο Νεύτωνας αναλαμβάνει τη διεύθυνση του λονδρεζίκου νομισματοκοπείου. Οι Γερμανοί Λάιμπνιτς και Γκάους συναγωνίζονται τους Αγγλο-Γάλλους με μεγάλες επιτυχίες στα ανώτερα μαθηματικά, ο Όυλερ καλείται στη Σουηδία και κατόπιν στη Ρωσία για να διδάξει τη μαθηματική επιστήμη. Αργότερα εμφανίζονται ο Πλανκ με τα κβάντα, οι Κιουρί με τη διάσπαση του ατόμου, ο Αϊνστάιν με τον τετραδιάστατο χωροχρόνο, ο Ρώσος Τσιολκόφσκι με τους διαστημικούς πυραύλους, ο Γιάννος Φον Νούμαν με τη θεωρία των παιγνίων και πολλοί χημικοί και γιατροί με τη βιοχημεία και τη μοριακή βιολογία. Όλα αυτά με μαθηματικές μεθόδους δημιουργούν την ατομική ενέργεια, την ηλεκτρονική, τη διαστημική, την πληροφορική, τη μηχανική – ιατρική και τους λοιπούς επιστημονικούς κλάδους των θετικών επιστημών, της τεχνολογίας και γενικότερα του πολιτισμού, που επιβάλλουν την προώθηση της μαθηματικής επιστήμης.

Επιστήμες οι οποίες σήμερα δεν μπορούν να ερμηνευτούν και να εξελιχθούν χωρίς τα μαθηματικά είναι κυρίως η φυσική, η χημεία, η κβαντομηχανική και η βιοϊατρική επιδημιολογία, η αεροναυπηγική και η διαστημική ναυπηγική, η σεισμολογία και η μετεωρολογία. Είναι, βέβαια, αμφίδρομη η σχέση των μαθηματικών με τις επιστήμες της φύσης, αφού η δημιουργία και η ανάπτυξη σημαντικών μαθηματικών θεωριών αυτές τις επιστήμες έχουν για αφετηρία τους. Με αφετηρία ιδιοφυείς μαθηματικές ιδέες, θεμελιώθηκαν και αναπτύχθηκαν κλά-

δοι που εμπλέκονται στις καθημερινές μας δραστηριότητες και τείνουν να καθορίσουν τη μελλοντική μας συμπεριφορά, όπως η πληροφορική και ο αυτοματισμός, η τεχνητή νοημοσύνη, η κρυπτογραφία και η θεωρία κωδικών, οι τηλεπικοινωνίες και η συγκοινωνιολογία. Ήδη χιλιάδες εφαρμογές της τεχνητής νοημοσύνης κατακλύζουν αθόρυβα τη ζωή μας κάνοντάς την εύκολη και ασφαλή. Από τη ρύθμιση των φαναριών στο δρόμο και τη διαχείριση της εναέριας κυκλοφορίας μέχρι την αποκωδικοποίηση των D.N.A. και την ιατρική η τεχνητή νοημοσύνη παίζει κυρίαρχο ρόλο. Ένας υπολογιστής πλέον κατευθύνει με εξαιρετική ακρίβεια και ασφάλεια εκατοντάδες άλλους ταυτόχρονα και μας εξυπηρετεί επαρκώς. Κανένας άνθρωπος δεν μπορεί να το κάνει αυτό. Όπου η τεχνητή νοημοσύνη είναι η βάση για εξειδικευμένες ανάγκες, τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι θαυμαστά. Οι μηχανές, βέβαια, δε διαθέτουν τις ικανότητες της ανθρώπινης φύσης και ευφυΐας. Το χάσμα ανάμεσα στον ανθρώπινο εγκέφαλο και στον ηλεκτρονικό υπολογιστή ήταν, είναι και για αρκετά χρόνια ακόμη θα είναι τεράστιο.

Τα μοντέρνα οικονομικά από το 1950-60 και μετά είναι βασισμένα κυρίως στα μαθηματικά και η μορφή επιστημονικής αντιπαράθεσης στον κλάδο αυτό δεν έχει τίποτα κοινό με τις μελέτες των παλιών οικονομολόγων. Τα υπολογιστικά οικονομικά βασίζονται σε μαθηματικές μεθόδους συμπεριλαμβανομένης και της οικονομετρίας, και γενικά οι νόμοι που διέπουν την οικονομία, διατυπωμένοι σε μαθηματική γλώσσα και ερμηνευμένοι με βάση σύγχρονες μαθηματικές θεωρίες, γίνονται εργαλεία πρόβλεψης, σχεδιασμού και ερμηνείας της κίνησης της κοινωνίας, μια που υπήρχε μια ολοένα και αυξανόμενη τάση να μεταφέρονται και σε άλλα πεδία ιδέες και μέθοδοι από τα οικονομικά. Επειδή η οικονομική ανάλυση επικεντρώνεται στη λήψη αποφάσεων, μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε τομέα όπου οι άνθρωποι έχουν εναλλακτικές λύσεις. Ένα πεδίο μελέτης στα οικονομικά ονομάζεται μικροοικονομική θεωρία και ένας σημαντικός κλάδος που ανήκει σ' αυτή είναι και η θεωρία παιγνίων. Είναι ο κλάδος που εξετάζει περιπτώσεις στρατηγικής αλληλεπίδρασης μεταξύ παικτών που προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν τη χρησιμότητά τους. Τα τελευταία είκοσι χρόνια έχει διαδοθεί ευρέως και χρησιμοποιείται όχι μόνο στα οικονομικά αλλά και σε κλάδους όπως η εξελικτική βιολογία, η ψυχολογία κ.ά. Κλάδοι όπως η μικρο- και η μακρο-οικονομία, τα χρηματοοικονομικά, η δημογραφία, ο αναλογισμός, τα ασφαλιστικά μαθηματικά, η επιχειρησιακή έρευνα κ.λπ. θεμελιώνονται στα μαθηματικά και η έρευνά τους στηρίζεται σε αυτά.

Ένας ακόμη καλός τρόπος για να κινηθεί το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά είναι και η γνωστοποίηση σε όλη τη μαθητική κοινότητα των δραστηριοτήτων της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, που εδώ και ενενήντα χρόνια συμβάλλει στην ενθάρρυνση και ανάπτυξη της σπουδής και έρευνας της μαθηματικής επιστήμης και των εφαρμογών της, σαφώς στην πρόοδο και τη διάδοση αυτής της επιστήμης, στην προαγωγή και ενίσχυση της διάχυσης των νέων εξελίξεων στα μαθηματικά, ενθαρρύνοντας κάθε είδους επιστημονικές δραστηριότητες, εκδίδοντας ερευνητικά περιοδικά, επιστημονικά βιβλία, πρακτικά

συνεδρίων και, βέβαια, τα γνωστά σε όλους μας, καταπληκτικά περιοδικά Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, πληροφορικής και διδακτικής. Συνεργάζεται με διεθνείς μαθηματικές εταιρείες και πολλούς άλλους συναφείς επιστημονικούς φορείς, και διοργανώνει επιμορφωτικά σεμινάρια, συνέδρια και τους ετήσιους Πανελλήνιους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς.

Προς τα τέλη του 19^{ου} αιώνα ο ελληνισμός έδωσε το παρών του στη διεθνή μαθηματική έρευνα με την παρουσία Ελλήνων του ελλαδικού χώρου, αλλά και Ελλήνων του εξωτερικού. Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή (1873-1950), αναγνωρισμένος και καταξιωμένος μαθηματικός, προσέφερε σημαντικό έργο σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών (καθαρών και εφαρμοσμένων). Και από τις έξι μεγάλες μορφές αυτής της επιστήμης, τους Κυπάρισσο Στέφανο (1857-1921), Νικολάδη Νικόλαο (1826-1889), Ιωάννη Χατζηδάκη (1884-1921), Παναγιώτη Ζερβό (1878-1952), Γιώργο Ρεμούνδο (1878-1926) και Νικόλα Χατζηδάκη (1872-1942), οι τρεις τελευταίοι είναι ιδρυτικά στελέχη της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (1918) και αποτελούν και το πρώτο προεδρείο του διοικητικού συμβουλίου της.

Τα παραδείγματα που δείχνουν τον κύριο ρόλο των μαθηματικών στις σύγχρονες εξελίξεις είναι ανεξάντλητα. Η φαντασία δε κάποιων μαθηματικών που έχουν εξειδικευτεί στους εκατό βασικούς κλάδους στους οποίους χωρίζεται η συγκεκριμένη επιστήμη βρίσκεται αρκετά χρόνια μπροστά. Συνθέτει και αναλύει προβλήματα και καταστάσεις που ύστερα από κάποιο μεγάλο χρονικό διάστημα μπορεί να αποκτήσουν τη μορφή πραγμάτων που χρησιμοποιούμε καθημερινά για να κάνουμε ευκολότερη τη ζωή μας. Κάτι σαν την Άλγεβρα του Τζορτζ Μπουλ, πολύτιμο εργαλείο για τη λύση προβλημάτων στην ηλεκτρονική και στις τηλεπικοινωνίες ειδικότερα, την οποία επεξεργάστηκε στα τέλη του 19^{ου} αιώνα και βρήκε εφαρμογή λίγο πριν το 1950, όταν φτιάχτηκε ο πρώτος ηλεκτρονικός υπολογιστής.

Οφείλουμε να βοηθήσουμε τους μαθητές μας μέσα από παραδείγματα κάποιων εφαρμογών που είναι δυνατόν να «ειπωθούν» με απλά λόγια και να γίνουν κατανοητές, προκείμενου να κινήσουμε το ενδιαφέρον τους για το σημαντικό και καθοριστικό ρόλο των μαθηματικών σε κάθε τομέα της ζωής. Να επισημάνουμε τη χρησιμότητά τους για την κατανόηση και επίλυση των προβλημάτων της σύγχρονης επιστήμης και τεχνολογίας, αλλά και για να αντιληφθούν καλύτερα τον κόσμο στον οποίο ζουν... Είναι εφαρμογές που δείχνουν πως η μαθηματική ανάλυση επιτρέπει τη μεγαλύτερη δυνατή ευκαμψία όταν αλληλεπιδρά με άλλες επιστήμες, στις οποίες θεωρείται απίθανη η παρουσία της, όπως συμβαίνει, για παράδειγμα, στα Fractals και στη θεωρία του χάους, στο D.N.A., στη ζωγραφική, στη θεωρία παιγνίων κ.α. Θα σταθούμε ενδεικτικά σε κάποια από αυτά τα παραδείγματα, που μπορούμε να παρουσιάσουμε και στην τάξη αναλύοντας την αρκετά προσιτή, πλέον, Fractals θεωρία –μαζί με αυτή του Χάους– που ξεπήδησε καθώς οι επιστήμονες αναζητούσαν λύσεις πάνω στις αντιφάσεις του νευτώνειου μοντέλου.

2. Fractals

Στις αρχές του 19^{ου} αιώνα τα μαθηματικά είχαν ήδη γίνει το κατεξοχήν αναλυτικό και λογικό αντικείμενο σπουδών. Στη δυναμική, όμως, το πρόβλημα των τριών σωμάτων – λυδία λίθος της σταθερότητας του ηλιακού συστήματος– εξακολουθούσε να μην έχει σταθερές λύσεις και ο Ανρύ Πουανκαρέ, αναλύοντας μια μερική λύση, είχε διαβλέψει μια εξαιρετικά περίπλοκη δομή. Σκοπός του δεν ήταν η ανατροπή του μηχανιστικού συστήματος, αλλά η τελειοποίησή του, μια και από την αρχή το νευτώνειο μοντέλο περιείχε την προβληματική ατέλεια να μπορεί να περιγράψει με απόλυτη ακρίβεια την κίνηση δυο αλληλεπιδρώντων ουράνιων σωμάτων αλλά, όχι τριών ή περισσότερων. Οι “κατά προσέγγιση” υπολογισμοί του παρέβλεπαν μικρές αποκλίσεις στην κίνηση των ουράνιων σωμάτων, που όμως, όταν αυτές συσσωρεύονταν, προκαλούσαν θεαματικές εκτροπές από τις προβλέψεις και τους υπολογισμούς. Ο Πουανκαρέ έπεσε πάνω στο χάος και ταυτόχρονα σε μια σημαντική φαινομενική παραδοξότητά του: Το χάος υπήρχε μέσα στο ηλιακό σύστημα, γιατί ολόκληρο το σύστημα είναι ολιστικό. Αν και το χάος μοιάζει να είναι το αντίθετο της ολότητας, διαπίστωσε ότι η ολότητα βρισκόταν ακριβώς στον πυρήνα του. Οι επιστήμονες που διαφώνησαν τότε επέστρεψαν ξανά σε αυτόν τη δεκαετία του '70 προκειμένου να εξηγήσουν κενές περιοχές στη ζώνη των αστεροειδών. Αυτά τα κενά ήταν τα σημεία όπου η θεωρία του Πουανκαρέ είχε προβλέψει ότι θα υπήρχαν χαοτικές τροχιές. Βλέποντας το όλο ζήτημα όχι τόσο από αναλυτική όσο από γεωμετρική σκοπιά, οι μαθηματικοί διαπίστωσαν ότι αυτό που έμοιαζε με απερίγραπτο κυκλώνα είχε παρόμοιες ομοιότητες με τον προφανή κυκλώνα του πραγματικού κόσμου. Τι ήταν όμως αυτό που τότε δεν συγκίνησε τους ερευνητές των φυσικών επιστημών, ενώ αντίθετα οι μαθηματικοί που δημιούργησαν τα “τέρατα” αυτά τα θεώρησαν σπουδαία, διότι αποτελούσαν απόδειξη ότι ο κόσμος των καθαρών μαθηματικών περιλάμβανε ένα πλούτο δυνατοτήτων που ξεπερνούσαν κατά πολύ τις μέχρι τότε απλούστερες δομές που είχαν παρατηρηθεί στη φύση;

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία μάς λέει ότι μια ευθεία γραμμή πάνω σε ένα κομμάτι χαρτί είναι ένα σχήμα μιας διάστασης (του μήκους). Αν επεκτείνουμε αυτή την ευθεία και τη στρέψουμε μπρος-πίσω, γύρω γύρω, χωρίς όμως να διασταυρώνονται οι γραμμές, μέχρι που να γεμίσει όλο το χαρτί, η Ευκλείδεια Γεωμετρία μάς λέει πως αυτό συνεχίζει να είναι γραμμή, δηλαδή μια μονοδιάστατη εικόνα. Η διαίσθησή μας όμως μάς λέει πως, αν η γραμμή γεμίσει πλήρως όλο το επίπεδο του χαρτιού, θα πρέπει να είναι δισδιάστατη.

Γνωρίζουμε από τα μαθητικά μας χρόνια πως η διάσταση ενός σημείου είναι μηδέν, η διάσταση μιας ευθείας ένα, του επιπέδου δύο και, βέβαια, πως η τρισδιάστατη του χώρου είναι τρία. Η διάσταση ενός χώρου είναι ακέραιος αριθμός, μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός. Κάνοντας μια οδοντωτή γραμμή πάνω στο χαρτί (είναι διάσταση (1) ένα) και γεμίζοντας όλο το χώρο, δηλαδή “πιάνοντας περισσότερο χώρο” πάνω στο επίπεδο, πλησιάζουμε στη διάσταση δυο (2), αφού η καμπύλη μας συστρέφεται και κάμπτεται και “γεμίζει” όλο το χώρο. Το χαρ-

τί αυτό, αν το τσαλακώσουμε, ομοίως, δεν πιάνει περισσότερο χώρο από ένα επίπεδο χαρτί; Όσο πιο τσαλακωμένο είναι το χαρτί, τόσο πιο κοντά πλησιάζουμε στη διάσταση (3) τρία. Η δισδιάστατη “φύση” του επιπέδου συνίσταται στο σύνολο των σημείων του. Τι θα μπορούσαν όμως να πουν οι μαθηματικοί για τη διάσταση του συνόλου του Cantor ή των καμπυλών των Koch και Peano; Οι βασικές μαθηματικές έννοιες για την “πολύ μακριά” καμπύλη του Peano, που ως γραμμή έπρεπε να είναι μονοδιάστατη, είχαν χάσει το νόημά τους πια και ενώ στις αρχές του 19^{ου} αιώνα τα μαθηματικά είχαν γίνει το κατεξοχήν αναλυτικό και λογικό αντικείμενο σπουδών (αιτιοκρατικό), στα τέλη του αιώνα έμοιαζε περισσότερο με θηριοτροφείο μαθηματικών τεράτων. Κάπως έτσι ξεκίνησαν επανάσταση στα μαθηματικά μαθηματικοί όπως οι George Cantor (1845-1918), Giuseppe Peano (1858-1932), David Hilbert (1862-1943), Felix Hausdorff (1868-1942), Helge Von Koch (1870-1924) και Waclaw Sierpinski (1882-1962), όταν σχεδίασαν κάποιες καμπύλες οι οποίες, ως δημιουργήματά της, αρρωστημένης για πολλούς εκείνη την εποχή, φαντασίας τους ονομάστηκαν “τέρατα” “ψυχωτικές” κ.τ.ό. Όμως αυτά τα μαθηματικά τέρατα δεν ήταν τελικά παρά οι φύλακες των σπηλαίων του Αλαντίν, που έκρυβαν καινούρια και υπέροχα μαθηματικά αντικείμενα. Η είσοδος δε σε αυτό τον κόσμο γινόταν μόνο μέσω των υπολογιστών, οι οποίοι έγιναν τα εργαστήρια των αλγοριθμοκεντρικών μαθηματικών. Και οι ανακαλύψεις που έγιναν έτσι δυνατές προώθησαν, με τη σειρά τους, την αναλυτική σκέψη και οδήγησαν στην παραδοχή ότι τα “απλά” συστήματα, στα οποία ήταν συνηθισμένοι οι μαθηματικοί, δεν ήταν παρά η κορυφή ενός πραγματικά γιγάντιου παγόβουνου.

Η φύση είναι πολύ πιο πολύπλοκη απ’ ό,τι την έχουν περιγράψει οι επιστήμονες. Δεν υπάρχουν δύο όμοια δέντρα ούτε δύο όμοια σύννεφα, όπως δεν υπάρχουν ούτε δύο ακτές, δύο έρημοι, δύο γαλαξίες των οποίων η μορφή και οι διαστάσεις συμπίπτουν απόλυτα. Ο κόσμος γύρω μας παλεύει να αναπαραγάγει την εικόνα του σε κάθε κλίμακα... ακόμη όμως και αν τα φύλλα ενός δέντρου μοιάζουν με φωτοαντίγραφα του ίδιου φύλλου, στην πραγματικότητα είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Βέβαια, αν ήταν τελικά Ευκλείδεια η Γεωμετρία της φύσης, θα ήταν πολύ εύκολο να αναπαραχθεί η πολυπλοκότητα κάθε τοπίου με τη βοήθεια ευθειών, τριγώνων, κύβων, κώνων ή σφαιρών. Όμως τελικά τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά!

Το 1961 ο Άγγλος μετεωρολόγος Lewis Richardson όταν επιχείρησε να μετρήσει το μήκος διάφορων ακτογραμμών διαπίστωσε ότι, όποτε προσπαθούσε να μετρήσει το μήκος μιας ακτογραμμής πάνω σε διαφορετικούς χάρτες με αυξανόμενη λεπτομέρεια, έφτανε κάποια στιγμή που έπρεπε να πάρει υπόψη του μικρούς κολπίσκους, ρυάκια και χερσονήσους κ.τ.ό., στοιχεία που δεν λαμβάνονταν υπόψη σε πιο “τραχείς” χάρτες. Ο Benoit Mandelbrot (1924) μελέτησε αργότερα την εργασία του Richardson και σε ένα κλασικό άρθρο του διατύπωσε το σατανικά περίπλοκο ερώτημα «ποιο είναι τελικά το μήκος των ακτών της Μ. Βρετανίας;». Άλλο μήκος θα πάρουμε κλιμακοποιώντας την εικόνα της χώρας από μια φωτογραφία δορυφόρου, άλλο από ένα χάρτη που έχει περισσότε-

ρες λεπτομέρειες των ακτών, άλλο από ένα ναυτικό χάρτη, πόσο μάλλον σε μοριακό ή ατομικό επίπεδο... Το αναπάντεχο συμπέρασμα είναι ότι το μήκος αυτό είναι άπειρο, χώρια που συνεχώς μεταβάλλεται με τα διάφορα φυσικά φαινόμενα! Η απάντηση που έδωσε ο Mandelbrot του χάρισε και τη φήμη. Απέδειξε ότι από τη στιγμή που το μετρούμενο μήκος μεγαλώνει απεριόριστα όσο θα προχωράμε σε μικρότερη κλίμακα (πιο αναλυτικά), δεν υπάρχει ξεκάθαρη απάντηση στο ερώτημα. Όμως είναι δυνατόν να ορίσουμε έναν αριθμό μεταξύ του (1) ένα και του (2) δυο, ο οποίος θα χαρακτηρίζει την “οδόντωση” της ακτογραμμής. Για τη βρετανική ακτή, ο αριθμός αυτός ισούται κατά προσέγγιση με το 1,58, ενώ για την πιο “άγρια” νορβηγική ακτή ισούται περίπου με 1,70. Από τη στιγμή που αποδεικνύεται ότι ο αριθμός αυτός έχει συγκεκριμένες ιδιότητες, χαρακτηριστικές της διάστασης, ο Mandelbrot τον ονόμασε Fractal διάσταση.

Ένας ορισμός της διάστασης προκύπτει ως μέτρο για το σχετικό βαθμό πολυπλοκότητας και τραχύτητας ενός σχήματος, ο οποίος σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από την ευκλείδεια διάσταση του αντίστοιχου χώρου όπου βρίσκεται το σχήμα. Η διάσταση αυτή μπορεί να είναι μη ακέραιος πραγματικός αριθμός και ονομάζεται Fractal (κλασματική) διάσταση. Αυτή η διάσταση είναι ένα σημαντικότερο και πολλές φορές μετρήσιμο μέγεθος των φυσικών συστημάτων. Μπορούμε να την υπολογίσουμε και μέσω διάφορων θεωρητικών μοντέλων.

Ο Μπενουά Μάντελμπροτ στο βιβλίο «Η Κλασματοειδής Γεωμετρία της Φύσης» λέει: «Γενικότερα, ισχυρίζομαι ότι πολλά σχήματα της Φύσης είναι τόσο ακαθόριστα και κατακερματισμένα που, αν τα συγκρίνουμε με τα Ευκλείδεια, βλέπουμε ότι η Φύση δεν είναι απλώς πιο πολύπλοκη, αλλά επιδεικνύει ένα εντελώς άλλο επίπεδο πολυπλοκότητας. Το πλήθος των φυσικών σχημάτων και μεγεθών είναι πρακτικά άπειρο. Η ύπαρξη αυτών των σχημάτων μάς προκαλεί να μελετήσουμε τις μορφές, που παρέλειψε ο Ευκλείδης θεωρώντας τις άμορφες, να διερευνήσουμε τη μορφολογία του άμορφου. Η λέξη Φράκταλ (Fractal) προέρχεται από το λατινικό Fractus και το ρήμα Frangere, που σημαίνει “σπάζω”, δημιουργώ ακανόνιστα θραύσματα. Είναι φυσικό να ταιριάζει με τις ανάγκες μας – το Fractus να σημαίνει και τεμαχισμένος αλλά και ακανόνιστος. Είμαι σίγουρος ότι οι επιστήμονες θα εκπλαγούν και θα χαρούν συνάμα ανακαλύπτοντας ότι πολλά σχήματα τώρα μπορούν να μελετηθούν με τη δέουσα επιστημονική αυστηρότητα και ακρίβεια.»

Έτσι, λοιπόν, το όνομα που έγινε συνώνυμο με τον τομέα της Fractal ή κλασματοειδούς γεωμετρίας είναι εκείνο του Γάλλου, πολωνικής καταγωγής μαθηματικού B. Mandelbrot (1924-) καθηγητή σήμερα του Γέιλ και πρώην στελέχους της I.B.M. Το ενδιαφέρον του γι' αυτό που αργότερα ονόμασε Fractals άρχισε το 1951 κορυφώθηκε το 1977 με το βιβλίο του “Η κλασματοειδής γεωμετρία της φύσης”, όπου συγκέντρωσε πολλά μαθηματικά και φυσικά παραδείγματα Fractals και τα κατέστησε κοινό κτήμα των επιστημόνων όλου του κόσμου. Το διανοητικό αποκορύφωμα της φράκταλ γεωμετρίας του Mandelbrot ήταν η ανακάλυψη μιας μαθηματικής δομής απίστευτης πολυπλοκότητας, η οποία όμως μπορεί να

παραχθεί από μια απλούστατη επαναληπτική διαδικασία. Το σύνολο Mandelbrot είναι μοναδικό και αποδεικνύεται ότι είναι συνδεδετικό. Αυτή η παράξενη φιγούρα είναι το πολυπλοκότερο μαθηματικό αντικείμενο που έχει ποτέ κατασκευαστεί και, παρόλο που οι κανόνες κατασκευής του είναι απλοί, η ποικιλομορφία και ο πλούτος που παρουσιάζει είναι απίστευτα.

Με τη βοήθεια του υπολογιστή ο Μάντελμπροτ ήταν ο πρώτος που τύπωσε αυτό το “σύνολο Μάντελμπροτ” (για την περίπτωση που το Z είναι μιγαδικός αριθμός). Το σύνολο Μάντελμπροτ είναι πράγματι ένα σύνολο αριθμών και η αρχική μονόχρωμη εκτύπωσή του έδειξε σε μαύρο εκείνες τις τιμές του για τις οποίες η επανάληψη δεν απέκλινε στο άπειρο – ήταν δηλαδή φραγμένη. Η απίστευτα λεπτή κατασκευή με τις χαρακτηριστικά οδοντωτές εκβλαστήσεις να απλώνονται σαν αστραπές αποκαλύφθηκε σιγά σιγά καθώς οι εκτυπωτές και οι κάρτες γραφικών αποκτούσαν όλο και μεγαλύτερη ανάλυση. Αυτό το απλό σύστημα έδειχνε πολλά από τα χαρακτηριστικά που προσπαθούσε να συγκεντρώσει ο Μάντελμπροτ. Η αυτο-ομοιότητα, που είναι τόσο χαρακτηριστική στα κλασματοειδή, γίνεται φανερή αν χρησιμοποιηθεί ένας υπολογιστής για να μεγεθυνθεί κάποιο μικρό μέρος τους, που τότε βλέπουμε ότι μοιάζει με το όλο. Ένα Fractal καθορίζεται από το γεγονός της αυτο-ομοιότητας, δηλαδή ότι ακόμη και στην απείρως μεγάλη μεγέθυνσή του προκύπτει ένα όμοιο με αυτό σχήμα. Το γεγονός αυτό εμπεριέχει την έννοια της αναδρομής – η κυριότερη διαδικασία που ακολουθείται κατά τη δημιουργία τέτοιων ειδών Fractals είναι η “ανάδραση” ή “επανάληψη”, οπότε ο υπολογιστής παίζει εδώ το ρόλο μιας απαραίτητης συσκευής, όπως, για παράδειγμα, το μικροσκόπιο για τον γιατρό.

Έτσι φράκταλ θεωρείται, με απλά λόγια, η ιδιότητα κάποιων στοιχείων του χώρου να επαναλαμβάνονται με όμοιο τρόπο από το μακρόκοσμο στο μικρόκοσμο. Αν και τα τεχνητά φράκταλ διαθέτουν άπειρες λεπτομέρειες, υστερούν σε λεπτότητα δομής από τα αντίστοιχα φυσικά. Οι εγκέφαλοι των μικρών θηλαστικών είναι σχετικά ομαλοί, ενώ τον ανθρώπων έχουν πάρα πολλές πτυχώσεις. Πιστεύεται ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος έχει Fractal διάσταση κάπου ανάμεσα στο 2,73 και το 2,79. Φράκταλ δομές συναντώνται και στις μεμβράνες των κυττάρων του ήπατος. Τα ρινικά οστά του ελαφιού και της πολικής αλεπούς μεγιστοποιούν την οσφρητική ικανότητα αναπτύσσοντας τη μέγιστη δυνατή επιφάνεια σε μικρό όγκο!

Η έννοια της κλασματικής διάστασης έγινε ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για την ανάλυση των φράκταλ σχημάτων ή, όπως αλλιώς ονομάζονται, των κλασματογενών συνόλων. Τα Fractals εμφανίζονται εκ του φυσικού στις εκφράσεις μαθηματικών φαινομένων, όπως στην πρόβλεψη καιρικών συστημάτων και στην αύξηση ή μείωση των πληθυσμών, σε κολλοειδή εναπόθετα καθώς και σε πολυμερή ηλεκτροχημικά μείγματα και ενσωματώσεις ελεγχόμενες από διάχυση. Φυσικοί, οικονομολόγοι, αστρονόμοι, βιολόγοι, ανατομολόγοι, ηλεκτρονικοί μηχανικοί και γεωγράφοι ανακαλύπτουν πως αναρίθμητες διαφορετικές μορφές μπορούν να χαρακτηριστούν από τις κλασματικές διαστάσεις τους. Επίσης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη γεωγραφία και κυρίως στις τηλεπικοινωνίες ως

μέσο συμπίεσης εικόνων για την μετάδοση και ανακατασκευή τους. Οτιδήποτε, από τη ροή των ποταμών ως τις πτυχώσεις του ανθρώπινου εγκεφάλου και από τη δομή των γαλαξιών ως τους τρόπους θραύσης των μετάλλων, επιδέχεται το φράκταλ μέτρο. Πρόκειται για μια θεωρία που έχει κυριεύσει όλους τους τομείς της επιστημονικής έρευνας. Στη φύση είναι πλέον κοινή πεποίθηση των ειδικών ότι τα πάντα είναι Fractals, διότι λείες γραμμές και επιφάνειες υπάρχουν μόνο στον ιδεατό κόσμο των μαθηματικών.

Με την βοήθεια των γραφικών και των Fractals είναι δυνατό να γίνουν πολύ πιο ελκυστικά και να “ζωντανέψουν” πολλά από τα μαθήματα που διδάσκονται στα σχολεία. Μέσα από την οθόνη ενός υπολογιστή μπορούν να κατανοήσουν τα παιδιά τη δημιουργία του ανθρώπινου πνεύμονα, τα αποτελέσματα γεωλογικών μετασχηματισμών του φλοιού της γης καθώς και φαινομένων διάβρωσης, αλλά και τα αιμοφόρα αγγεία ή τα νευρικά συστήματα. Πρέπει να μάθουν τα παιδιά πως, αν θέλουμε να μιλήσουμε για σύννεφα, βουνά, ποτάμια, κεραυνούς κ.ά., η γεωμετρική γλώσσα που χρησιμοποιούσαμε ως τώρα δεν είναι πλέον επαρκής, μια που η φύση είναι εξαιρετικά πολύπλοκη, και μπορεί ο κορμός ενός δέντρου να είναι λίγο-πολύ κυλινδρικός, η Γη, κατά προσέγγιση σφαιρική, η τροχιά γύρω από τον ήλιο περίπου κυκλική, αλλά είναι καιρός να μπορούμε να περιγράψουμε και τα υπόλοιπα φυσικά φαινόμενα με φορμαλιστικούς, μαθηματικούς όρους! Για παράδειγμα, οι επαναλαμβανόμενες διακλαδώσεις των αιμοφόρων αγγείων πολλές φορές παρουσιάζουν τόσο μεγάλη αυτο-ομοιότητα, ώστε συχνά δεν ξεχωρίζουν τα μέρη από το όλο. Η καταπληκτική αυτή ομοιότητα εικόνων ήταν γνωστή για πολύ καιρό στον επιστημονικό χώρο, όμως πριν από τον Mandelbrot δεν υπήρχε μαθηματική γλώσσα να την περιγράψει!

(Η συνέχεια του άρθρου θα δημοσιευτεί στο επόμενο τεύχος)

Βιβλιογραφία

- Αγραφιώτης, Δ. (1999), *Πολιτιστικές αβεβαιότητες*, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.
- Αντόρνο, Λόβενταλ, Μαρκούζε και Χορκχάιμερ (1984), *Τέχνη και μαζική κουλτούρα*, Ύψιλον, Αθήνα.
- Burke, Peter (2003), *Αυτοψία Οι χρήσεις των εικόνων ως ιστορικών μαρτυριών*, Μεταίχμιο, Αθήνα.
- Γκόντφρεϋ, Τόνυ (2001), *Εννοιολογική τέχνη*, Καστανιώτης, Αθήνα.
- Γκουγκουλή, Κλεώ (1999), *Παιδί και παιχνίδι στη νεοελληνική κοινωνία*, Καστανιώτης, Αθήνα.
- Da Silva, Jose Gentil (1986), *Η ιστορικότητα της παιδικής ηλικίας και της νεότητας*, στο: ΙΑΕΝ και Γενική Γραμματεία Νέας Γενιάς, τόμος Α', Αθήνα.
- Καμπουρίδης, (1986), *Η ιστορικότητα της παιδικής ηλικίας και της νεότητας*, τόμος Β', ΙΑΕΝ και Γενική Γραμματεία Νέας Γενιάς, Αθήνα.
- Κανατσούλη, Μένη, «Νεότερες απόψεις στη μελέτη της Παιδικής Λογοτεχνίας», *Η Λέσχη των Εκπαιδευτικών*, τεύχος 11, σ. 27-29.
- Καρπόζηλου, (1986), *Η ιστορικότητα της παιδικής ηλικίας και της νεότητας*, τόμος Β', ΙΑΕΝ και Γενική Γραμματεία Νέας Γενιάς, Αθήνα.
- Μακντόναλντ, Ν. (1994), *Μια θεωρία για τη μαζική κουλτούρα*, Η κουλτούρα των μέσων, Αλεξάνδρεια, Αθήνα.
- Μακρυγιάννη, Δ. (2003), *Κόσμοι της παιδικής ηλικίας*, Τοπικά δ', Νήσος.
- Μακρυγιάννη, Δ. (1986), *Η παιδική ηλικία στα αναγνωστικά βιβλία 1834-1919*, Δωδώνη, Αθήνα-Γιάννενα.
- Μιχαήλ, Μ. (2007), *Η παιδική ηλικία στο σύγχρονο παιδικό περιοδικό τύπο*, Πτυχιακή Εργασία, Διδασκαλείο «Μαρία Αμαριώτου» Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Κρήτης, 2007.
- Μπωντριγκιάρ, Ζ. (1994), «Η κουλτούρα των μαζικών μέσων», στο: *Η κουλτούρα των μέσων*, Αλεξάνδρεια, Αθήνα, σ. 263-295.
- Ντελόπουλος, Κ. (1996) *Η Παιδική Αποθήκη και ο Δημήτριος Πανταζής. Το πρώτο ελληνικό παιδικό περιοδικό και ο εκδότης του. Συμβολή στη μελέτη της παιδικής λογοτεχνίας*, Καστανιώτης, Αθήνα.
- Οικονομίδου, Σ. (2000), *Χίλιες και Μία Ανατροπές*, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.
- Πατινώτης, Ν. (1992), *Μεθοδολογία Κοινωνικών Ερευνών*, Πάτρα.
- Αφιέρωμα: Παιδική Λογοτεχνία, *Περίπλους*, Τετράδιο για τα γράμματα και τις τέχνες, τεύχος 49, σ. 37-46.
- Overtrup, J. (2003), *Κόσμοι της Παιδικής Ηλικίας*, Τοπικά δ', Νήσος.
- Πάτσιου, (1986), *Η ιστορικότητα της παιδικής ηλικίας και της νεότητας*, τόμος Β', ΙΑΕΝ και Γενική Γραμματεία Νέας Γενιάς, Αθήνα 1986, σ. 517-522.
- Αντόρνο, Τ. (1994), *Η τηλεόραση και η διαμόρφωση της μαζικής κουλτούρας. Η κουλτούρα των μέσων*, Αλεξάνδρεια, Αθήνα, σ. 89-114.

- Τερεζάκη, Χ. (2004), *Το πρόγραμμα «Μελίνα-Εκπαίδευση και Πολιτισμός» ως εναλλακτική μορφή επικοινωνίας και μάθησης*, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Π.Τ.Δ.Ε, Ρέθυμνο.
- Fagotti, U. (1986), *Η ιστορικότητα της παιδικής ηλικίας και της νεότητας*, τόμος Α', ΙΑΕΝ και Γενική Γραμματεία Νέας Γενιάς, Αθήνα.