Η διδακτική των μαθηματικών εννοιών στη βασική εκπαίδευση: Όψεις και προοπτικές

Θωμάς Β. Κοτοπούλης
Δάσκαλος - Μαθηματικός, Διδάκτωρ Διδακτικής Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών

Εισαγωγή

Τα Μαθηματικά αποτέλεσαν και αποτελούν ακόμα και σήμερα τον κινητήριο μοχλό της ανθρώπινης προόδου. Ο ρόλος τους, από την εποχή ακόμη του προϊστορικού πρωτόγονου ανθρώπου και των εμπειρικών υπολογισμών μέχρι και τη σύγχρονη, αλματώδη τεχνολογική και ηλεκτρονική εξέλιξη, είναι αδιαμφισβήτητα καταλυτικός.

Είναι προφανές ότι κάθε πρόοδος σε οποιονδήποτε τομέα της ανθρώπινης δράσης, κάθε κοινωνική, οικονομική, πολιτιστική και τεχνολογική ανάπτυξη και, γενικότερα, κάθε πρόοδος του ανθρώπινου είδους στον πλανήτη είχε ως δομική συνιστώσα της την επιστήμη των Μαθηματικών.

Στην εποχή μας, ιδιαίτερο ενδιαφέρον προκαλούν οι έρευνες με στόχο τον τρόπο με τον οποίο δομείται και αναπτύσσεται η μαθηματική γνώση. Έρευνες αυτού του είδους απασχολούν έντονα σήμερα τόσο τους μαθηματικούς όσο και τους γνωστικούς ψυχολόγους. Η γενική τάση, πάντως, συγκλίνει προς την κατεύθυνση μιας εποικοδομητικής υπόθεσης σχετικά με τον τρόπο πρόσληψης των διάφορων μαθηματικών εννοιών (Κοτοπούλης, 2004).

Η ιστορία των Μαθηματικών και ο ρόλος της στη μαθηματική εκπαίδευση

Τα τελευταία χρόνια αυξάνει ολοένα και περισσότερο το ενδιαφέρον των ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο η ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών μπορεί να τροφοδοτήσει και να επηρεάσει θετικά τη διδακτική τους προσέγγιση στο σύγχρονο Σχολείο (Fauvel & Van Maamen, 1997, σσ. 116-126).

Η άποψη ότι τα σχολικά Μαθηματικά δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένα σύνολο προκαθορισμένων «κανόνων» και διάφορων «τεχνικών», που θα πρέπει αυτούσια να μεταφερθούν από τον δάσκαλο στους μαθητές του, έχει αντικατασταθεί με την αντίληψη ότι τα Μαθηματικά αποτελούν μέρος της βιώσιμης πραγματικότητας των παιδιών και έτσι ακριβώς πρέπει να εκτιμώνται και να διδάσκονται. Η αντίληψη αυτή συμφωνεί απόλυτα με την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών, γιατί οι διάφορες μαθηματικές έννοιες και ιδέες που ανακαλύφθηκαν και αναπτύχθηκαν ανά τους αιώνες οφείλονται τόσο σε προσωπικές δημιουργίες των μαθηματικών επιστημόνων όσο και στη διαπραγμάτευσή τους με διάφορους επιστημονικούς κλάδους (Confrey, 1991, σσ. 111-138).

Η εξέλιξη των Μαθηματικών είναι αλληλένδετη με την εποχή και τις συνθήκες (κοινωνικές, οικονομικές, πολιτιστικές) που κάθε φορά επικρατούσαν. Η μελέτη της ιστορίας τους αποδεικνύει ότι η εξελικτική πορεία των μαθηματικών εννοιών συνοδευόταν, όχι σπάνια, από λάθη, παραλείψεις, αδιέξοδα και ανεπιτυχείς προσπάθειες. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο, η άποψη ότι τα σχολικά μαθηματικά είναι ένα σύνολο κανόνων και ορθών απαντήσεων βρίσκεται σε πλήρη αντίθεση με την πραγματική φύση της μαθηματικής επιστήμης. Μιας φύσης που σκιαγραφείται ανάγλυφα στο πλαίσιο της κατασκευαστικής επιστημολογίας για τη μάθηση και τη διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών (Von Glasersfeld, 1990, σσ. 19-29).

Ως ένα από τα βασικότερα ερωτήματα της σύγχρονης διδακτικής των μαθηματικών στην εκπαίδευση παραμένει ακόμα και σήμερα η κατασκευή κατάλληλων μαθηματικών δραστηριοτήτων έτσι, ώστε να αναπτύσσεται το πραγματικό ενδιαφέρον και ο γόνιμος προβληματισμός των παιδιών μέσα στη σχολική αίθουσα διδασκαλίας. Την τελευταία, μάλιστα, δεκαετία οι έρευνες έχουν στραφεί στον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσε ακόμη και η ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών να συμβάλλει στη διδακτική τους προσέγγιση. Οι μέχρι τώρα έρευνες στο πεδίο αυτό επικεντρώνονται σε δύο κυρίως άξονες (Καφούση, 2002, σσ. 219-230):

α) στα αυθεντικά ιστορικά μαθηματικά κείμενα και την αξιοποίησή τους στη διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών, και

β) στη διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας με βάση την ιστορική πορεία ανάπτυξής της.

Σχετικά με τον *πρώτο άξονα*, πρόσφατα ερευνητικά δεδομένα μάς αποκαλύπτουν ότι η κατάλληλη επιλογή και παρουσίαση αυθεντικών ιστορικών μαθηματικών κειμένων μπορεί να συμβάλει στη δημιουργική σύνθεση απόψεων και ιδεών, μέσα από γόνιμες συζητήσεις μεταξύ των μελών της σχολικής τάξης (Arcavi & Bruckheimer, 2000, σσ. 55-74). Τα κείμενα αυτά είναι δυνατό να αναφέρονται στους εξής τομείς:

(i) Στα θεμελιώδη ερωτήματα καθώς και στους εγγένει προβληματισμούς που απασχόλησαν τους επιστήμονες για τη γένεση και ανάπτυξη των διάφορων μαθηματικών εννοιών.

Η παρουσίαση και η συζήτηση τέτοιου είδους μαθηματικών κειμένων μέσα στη σχολική τάξη δίνει στους μαθητές την ευκαιρία να γνωρίσουν και να συνειδητοποιήσουν, παράλληλα, ότι η γένεση και η εξελικτική πορεία μιας μαθηματικής έννοιας ήταν το επιστέγασμα πολλών, χρονοβόρων και επίμονων προσπαθειών. Έτσι, θα μπορέσουν να κατανοήσουν τα παιδιά σε βάθος την ανάγκη της κατασκευής συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών και να εκτιμήσουν τις δικές τους προσπάθειες επίλυσης των διάφορων καταστάσεων προβληματισμού. Για παράδειγμα, στο παρακάτω απόσπασμα του Alkhwarizmi (825 μ.Χ.) αποτυπώνεται η άποψη Ινδών μαθηματικών σχετικά με τη χρήση του μηδενός: «Όταν μια αφαίρεση δεν αφήνει τίποτα, τότε για να μην μείνει άδεια η θέση, πρέπει να μπαίνει εκεί ένας μικρός κύκλος, γιατί διαφορετικά οι θέσεις θα λιγοστέψουν και μπορεί να δημιουργηθεί σύγχυση, π.χ. η δεύτερη θέση να θεωρηθεί πρώτη» (Εξαρχάκος, 2001, σ. 280). Το απόσπασμα αυτό μπορεί να προκαλέσει συζήτηση μεταξύ των μελών της μαθητικής κοινότητας σχετικά με την ιστορική εξέλιξη του συμβόλου του μηδενός, την αξία της θέσης των ψηφίων ενός αριθμού, τη σημασία του μηδενός σε κάποιον αριθμό κ.τ.λ.

Συζήτηση και ανταλλαγή απόψεων στην τάξη μπορούν να προκαλέσουν επίσης και οι προσπάθειες των αρχαίων Ελλήνων (μαθηματικών, φιλοσόφων) σχετικά με τον ορισμό των εννοιών της μονάδας και του αριθμού, καθώς και τη διάκριση των αριθμών σε άρτιους και περιττούς.

Σχετικά με τον ορισμό της μονάδας και του αριθμού, ο Αριστοτέλης αποφαίνεται ότι το «Ένα» είναι το ξεκίνημα, η αρχή του αριθμού, διότι δεν μπορεί το μέτρο –η μονάδα μέτρησης– να ταυτίζεται με το μετρώμενο αντικείμενο, δηλαδή τον αριθμό. Αλλά και ο Ευκλείδης δίνει ένα παρόμοιο ορισμό παρατηρώντας πως «μονάδα» είναι αυτό μέσω του οποίου κάθε αντικείμενο ονομάζεται ένα, ενώ αριθμός είναι το πλήθος που αποτελείται από τέτοιου είδους «μονάδες». Ο πρώτος, βέβαια, ορισμός του αριθμού αποδίδεται στον Θαλή τον Μιλήσιο, ο οποίος ασπαζόμενος την αιγυπτιακή αντίληψη τον όρισε ως «μια συλλογή από μονάδες» (Heath, 2001, τόμ. I, σσ. 93-94).

Η διάκριση ανάμεσα σε μονούς (περιττούς) και ζυγούς (άρτιους) αριθμούς οφείλεται αναμφίβολα στον Πυθαγόρα, κατά την άποψη του οποίου «Άρτιος είναι ο αριθμός που μπορεί να διαιρεθεί με μία και την αυτή πράξη στο μέγιστο και στο ελάχιστο μέρος, μέγιστο ως προς το μέγεθος αλλά ελάχιστο ως προς τον αριθμό, ενώ περιττός αριθμός είναι εκείνος που δεν μπορεί να διαιρεθεί με αυτό τον τρόπο παρά μόνο σε δύο άνισα μέρη» (ό.π., σσ. 94-95). Σχετικά με τη μονάδα, οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι, επειδή ήταν η αρχή όλων των αριθμών, άρτιων και περιττών, δεν είναι δυνατό να είναι ούτε άρτια αλλά ούτε και περιττή, οπότε την ενέταξαν σε μια καινούργια κατηγορία, που ονόμασαν *αρτιοπέριττη*.

Είναι χαρακτηριστικό, επίσης, το γεγονός ότι στην αρχαία Ελλάδα οι μεγάλοι μαθηματικοί προβλημάτιζαν τους πολίτες ακόμα και από τον ... «τάφο τους»! Έτσι, το επίγραμμα στον τάφο του Διόφαντου προκαλούσε τους περαστικούς, αλλά μπορεί και σήμερα να προκαλέσει τους μαθητές μιας σχολικής τάξης, να υπολογίσουν την ηλικία του θανάτου του (Heath, 2001, τόμ. II, σ. 513): « ... Η νεότητά του διήρκεσε το ένα έκτο της ζωής του. Ύστερα από άλλο ένα δωδέκατο φύτρωσαν τα γένια του. Παντρεύτηκε ύστερα από ένα επιπλέον έβδομο και ο γιος του γεννήθηκε πέντε χρόνια αργότερα. Ο γιος αυτός έζησε το μισό της ηλικίας του πατέρα του, και ο πατέρας του πέθανε τέσσερα χρόνια μετά το θάνατο του γιου του».

(ii) Στους διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης μιας μαθηματικής έννοιας ή κάποιας μαθηματικής διαδικασίας, σε διαφορετικά κοινωνικο-πολιτισμικά περιβάλλοντα.

Το ακόλουθο απόσπασμα, από το βιβλίο: *Ιστορία των μαθηματικών*, του Θ. Εξαρχάκου (2001, σσ. 482-483), αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο οι αρχαίοι Αιγύπτιοι υπολόγιζαν το γινόμενο δύο αριθμών: «Για να υπολογίσουν το γινόμενο α□β δύο ακεραίων, αποφάσιζαν πρώτα ποιος είναι ο πολλαπλασιαστής και ποιος ο πολλαπλασιαστέος. Ας υποθέσουμε ότι πολλαπλασιαστής είναι ο α και πολλαπλασιαστέος ο β. Τότε, διπλασίαζαν το β τόσες φορές, ώστε το άθροισμα κάποιων από τους αριθμούς 1, 2, 4, 8, 16, ... να δίνει τον αριθμό α. Στη συνέχεια, άθροιζαν τα πολλαπλάσια του β που αντιστοιχούσαν στους αριθμούς αυτούς και είχαν το γινόμενο α□β. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι ήθελαν να υπολογίσουν το γινόμενο 11□23 και ότι πολλαπλασιαστής είναι το 11. Έγραφαν:

1	23
2	46
4	92
8	184

Παρατηρούμε ότι: 1+2+8=11. Άρα το άθροισμα των αριθμών 23, 46, 184 που αντιστοιχούν στους αριθμούς 1, 2, 8 κατά τους παραπάνω διπλασιασμούς θα δίνει το γινόμενο 11□23. Δηλαδή, 11□23 = 23 + 46 +184 = 253.

Με αφορμή το παραπάνω κείμενο, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να γνωρίσουν, να σκεφθούν και να συγκρίνουν το σημερινό αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού με αυτόν των αρχαίων Αιγυπτίων. Να συνειδητοποιήσουν, επίσης, την εξελικτική πορεία των μαθηματικών διαδικασιών καθώς και τη συνεισφορά τόσο των άλλων πολιτισμών όσο και του δικού τους. Έτσι, αφού συζητήσουν με τους συμμαθητές τους αλλά και με τον εκπαιδευτικό της τάξης, γύρω από την πράξη του πολλαπλασιασμού, θα γίνουν ικανοί να οικοδομήσουν σε βάθος και να αναπτύξουν σφαιρικά τη συγκεκριμένη μαθηματική διαδικασία.

Ο D'Ambrosio (1985, σσ. 44-48), επισημαίνει ότι «δημιουργώντας μία γέφυρα ανάμεσα στους ανθρωπολόγους, τους ιστορικούς και τους μαθηματικούς γίνεται ένα σημαντικό βήμα για την αναγνώριση διαφορετικών τρόπων σκέψης οι οποίοι μπορούν να οδηγήσουν σε διαφορετικές μορφές Μαθηματικών».

(iii) Στην ιστορία της μαθηματικής εκπαίδευσης των παιδιών.

Μία βασική συνιστώσα της σύγχρονης διδακτικής, γενικότερα, αποτελεί η διάσταση της διαθεματικότητας της γνώσης. Αυτό σημαίνει πως τα μαθηματικά μπορούν κάλλιστα να συνδυαστούν με άλλα γνωστικά αντικείμενα (π.χ. γλώσσα, ιστορία, γεωγραφία κ.τ.λ.) και να διδαχθούν διάφορες μαθηματικές έννοιες με τυχόν εναύσματα που θα δοθούν στο πλαίσιο, για παράδειγμα, του μαθήματος της γλώσσας. Η λεγόμενη «διαθεματική» προσέγγιση της γνώσης δεν αποτελεί, όπως ίσως θα πίστευε κανείς, σύγχρονο επίτευγμα της διδακτικής, αφού στην πράξη τέτοιου είδους διαδικασίες εφαρμόζονταν και στην εκπαίδευση των αρχαίων Ελλήνων, όπου, για παράδειγμα, στο μάθημα της ορθογραφίας ο δάσκαλος ζητούσε από τους μαθητές να υπολογίσουν το πλήθος, καθώς και τη διατακτική σειρά των γραμμάτων που περιείχε μια λέξη (π.χ. η λέξη άνθρωπος). Με τον τρόπο αυτόν οι μαθητές διδάσκονταν τους πληθικούς και τους διατακτικούς αριθμούς (Heath, 2001, τόμ. Ι, σ. 36).

Οι ερευνητές Arcavi και Bruckheimer (2000, σσ. 55-75), πραγματοποίησαν έρευνα σύμφωνα με την οποία ζήτησαν από μαθητές ηλικίας 12-13 ετών να ασχοληθούν με δραστηριότητες οι οποίες αποτελούσαν μέρος της διδακτικής ύλης παλαιότερων σχολικών μαθηματικών εγχειριδίων, ενώ ταυτόχρονα καλούσαν τα παιδιά να απαντήσουν στο ερώτημα: «Πώς νομίζεις ότι θα μάθαινες αριθμητική, αν είχες γεννηθεί πριν από 60 χρόνια;». Από τη διαδικασία αυτή, οι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η ενασχόληση των μαθητών με δραστηριότητες που αφορούν τη μαθηματική εκπαίδευση παλαιότερων χρόνων δίνει την ευκαιρία στα παιδιά να συνειδητοποιήσουν την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών, να στοχαστούν δημιουργικά για τους στόχους της μαθηματικής τους εκπαίδευσης και, τέλος, να κινηθούν δραστικά προς τη δόμηση και την ανάπτυξη της μαθηματικής τους γνώσης.

Χαρακτηριστική, επίσης, είναι και η ακόλουθη μαθηματική πρόταση σχετικά με τη διαιρετότητα των ακέραιων αριθμών, η οποία διατυπώθηκε από τον Ιάμβλιχο και διακοσμούσε τη μαθηματική εκπαίδευση των αρχαίων Ελλήνων (Heath, 2001, τόμ. Ι, σ. 142): «Έστω ότι έχουμε οποιουσδήποτε τρεις διαδοχικούς αριθμούς ο μεγαλύτερος από τους οποίους είναι διαιρετός με τον 3. Ας θεωρήσουμε το άθροισμα αυτών των αριθμών, το οποίο αποτελείται από ένα συγκεκριμένο πλήθος μονάδων, δεκάδων, εκατοντάδων κ.ο.κ. Τώρα, ας θεωρήσουμε τις μονάδες στο άθροισμα αυτό ως έχουν, κατόπιν τόσες μονάδες όσες είναι οι δεκάδες στο άθροισμα, τόσες μονάδες όσες είναι οι εκατοντάδες, κ.ο.κ., και ας προσθέσουμε όλες τις μονάδες που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο (δηλαδή, ας προσθέσουμε τα ψηφία του αθροίσματος, όπως εκφράζεται στο δεκαδικό μας σύστημα). Ακολούθως, ας εφαρμόσουμε τη ίδια διαδικασία στο αποτέλεσμα που προκύπτει, κ.ο.κ. Τότε, γράφει ο Ιάμβλιχος, το τελικό αποτέλεσμα θα είναι ο αριθμός 6». Για παράδειγμα, οι αριθμοί 13, 14 και 15, είναι διαδοχικοί και ο μεγαλύτερος (15) είναι διαιρετός με τον 3 ($15{:}\ 3 = 5$). Το άθροισμα αυτών των αριθμών είναι: $13+14+15 = 42$, και αν προσθέσουμε τα ψηφία του αριθμού 42 προκύπτει ως αποτέλεσμα ο αριθμός 6.

Σχετικά, τώρα, με το *δεύτερο άξονα* των ερευνών για τη συμβολή της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών στην οργάνωση του τρόπου διδασκαλίας τους στην τάξη, έχουν εκφραστεί διάφορες και κατά καιρούς αντιμαχόμενες απόψεις από τους ερευνητές. Μία από τις απόψεις που ξεχώρισε και η οποία έχει καταγραφεί στη σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών ως το γενετικό μοντέλο διδασκαλίας θέλει τη διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας να παραλληλίζεται πλήρως με τις ιστορικές συνθήκες δημιουργίας και ανάπτυξής της (Γαγάτσης, 1993). Ειδικότερα στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, το παραπάνω μοντέλο διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών προσιδιάζει στη ρεαλιστική προσέγγιση της διδασκαλίας, σύμφωνα με την οποία η διδασκαλία μιας συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας μπορεί και είναι θετικό να αρχίζει με αφορμή τα προβλήματα που και στο παρελθόν έκαναν έκδηλη την ανάγκη της δημιουργίας της. Και, φυσικά, από την άλλη πλευρά και ο ίδιος ο μαθητής έχει το δικαίωμα να περπατήσει στο ίδιο μονοπάτι που περπάτησε πριν κάποια χρόνια το ανθρώπινο είδος. Αυτό, όμως, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι θα αναπαραχθεί ακριβώς η ίδια διαδικασία του παρελθόντος, αφού ... «οι καιροί .. άλλαξαν»! (όπως ισχυρίζονται οι αντιμαχόμενοι το συγκεκριμένο μοντέλο διδασκαλίας). Απλώς, θα αποτελέσει τη βάση πάνω στην οποία θα στηριχτεί η μαθησιακή διαδικασία με στόχο την οικοδόμηση και ανάπτυξη της συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας από τους μαθητές (Κολέζα, 2000, σ. 7). Έτσι, για παράδειγμα, μπορεί ο δάσκαλος να χρησιμοποιήσει τη ρεαλιστική προσέγγιση διδασκαλίας για να εισαγάγει τους μαθητές του στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Για την επίτευξη του στόχου αυτού, οι μαθητές καλούνται να αντιμετωπίσουν με βιωματικό τρόπο το «πρόβλημα του βοσκού», σύμφωνα με το οποίο ένας βοσκός, στην προσπάθειά του να καταμετρήσει το σύνολο των προβάτων του, τοποθετεί μέσα σε ένα σάκο μία πέτρα για το κάθε πρόβατο. Όμως, σε κάποια στιγμή ο σάκος γίνεται αρκετά βαρύς και δεν μπορεί να τον σηκώσει. Τότε, καλούνται οι μαθητές να δώσουν λύση στο πρόβλημα που αντιμετωπίζει ο βοσκός και γι' αυτό συζητούν μεταξύ τους, εκθέτουν τις απόψεις τους, εικάζουν, εξάγουν συμπεράσματα και τελικά οδηγούνται (και με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού, όταν χρειαστεί) στη λύση της αντικατάστασης δέκα πετρών με ένα ξυλάκι ή οτιδήποτε άλλο. Συνεπώς, οι μαθητές εμπλέκονται ενεργά και με βιωματικό τρόπο στη δημιουργία του δεκαδικού συστήματος συνειδητοποιώντας παράλληλα ότι κάποια συγκεκριμένη ανάγκη οδήγησε σε μια κοινωνική σύμβαση για την δημιουργία αυτή (Gravemeijer, 1991, σσ. 57-76).

Αξίζει, πιστεύουμε, στο σημείο αυτό να παραθέσουμε ένα εκπληκτικό κείμενο, τόσο από γλωσσική όσο και από μαθηματική άποψη, του Πάππου από την Αλεξάνδρεια, το οποίο αποτελεί εισαγωγή για τον υπολογισμό της περιμέτρου επίπεδων σχημάτων και περιέχεται στο δεύτερο τόμο του βιβλίου: *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*, του Heath (2001, σσ. 451-453): «Είναι φυσικά στον άνθρωπο που ο Θεός έχει δώσει την καλύτερη και πιο τέλεια έννοια σοφίας γενικά και της μαθηματικής επιστήμης ειδικότερα, αλλά ένα μικρό μερίδιο από αυτά τα πράγματα το παραχώρησε επίσης σε κάποια από τα μη νοήμονα ζώα ... όμως, πολύ περισσότερο στις μέλισσες. Πιθανώς επειδή πιστεύουν (οι μέλισσες) ότι οι θεοί έχουν εμπιστευθεί σε αυτές το έργο της μεταφοράς, στην άξια μερίδα της ανθρωπότητας, ενός μέρους από την αμβροσία με αυτή τη μορφή, δε θεωρούν ότι είναι σωστό να το χύσουν απρόσεκτα στο έδαφος ή σε ξύλο ή σε ένα άλλο άσχημο και ακανόνιστο υλικό, αλλά, αφού πρώτα συλλέξουν τα γλυκά από τα πιο όμορφα λουλούδια που ανθίζουν στη γη, κάνουν από αυτά, για τη λήψη του μελιού, τα αγγεία που ονομάζουμε κηρήθρες, όλα ίσα, όμοια, εφαπτόμενα το ένα στο άλλο, και με εξαγωνικό σχήμα. Και το ότι τα έχουν σχεδιάσει αυτά μέσω κάποιας γεωμετρικής προνοητικότητας μπορούμε να το συμπεράνουμε ως εξής: Θα σκέφτονταν απαραίτητα ότι τα σχήματα πρέπει να είναι τέτοια, ώστε να εφάπτονται μεταξύ τους, δηλαδή να έχουν τις πλευρές τους κοινές, ώστε καμία ξένη ουσία να μην εισέλθει στις σχισμές ανάμεσά τους και να μολύνει έτσι την αγνότητα της παραγωγής τους. Τώρα, μόνο τρία ευθύγραμμα σχήματα θα ικανοποιούσαν τη συνθήκη, εννοώ κανονικά σχήματα που είναι ισόπλευρα και ισογώνια, διότι οι μέλισσες δε θα δέχονταν κανένα από τα σχήματα που δεν είναι ομοιόμορφα ... Εφόσον υπάρχουν λοιπόν τρία σχήματα που είναι από μόνα τους ικανά να γεμίσουν τελείως το χώρο γύρω από το ίδιο σημείο, οι μέλισσες, λόγω της ενστικτώδους ευφυΐας τους, διαλέγουν για την κατασκευή της κηρήθρας τους το σχήμα που έχει τις περισσότερες γωνίες, διότι αντιλήφθηκαν ότι θα περιείχε περισσότερο μέλι από οποιοδήποτε από τα άλλα δύο. ... Οι μέλισσες, λοιπόν, γνωρίζουν μόνο αυτό το γεγονός που τους εξυπηρετεί, ότι το εξάγωνο είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο και το τρίγωνο και θα κρατήσει περισσότερο μέλι με την ίδια κατανάλωση υλικού που χρησιμοποιείται για την κατασκευή των διάφορων σχημάτων. Εμείς, ωστόσο, ισχυριζόμενοι ότι κατέχουμε μεγαλύτερο μερίδιο ευφυΐας από τις μέλισσες, θα ερευνήσουμε ένα πρόβλημα μεγαλύτερης έκτασης, δηλαδή ότι, από όλα τα ισόπλευρα και ισογώνια επίπεδα σχήματα με ίση περίμετρο, αυτό που έχει το μεγαλύτερο αριθμό γωνιών είναι πάντα μεγαλύτερο, και το μεγαλύτερο επίπεδο σχήμα από αυτά που έχουν περίμετρο ίση με αυτή των πολυγώνων είναι ο κύκλος ... ».

Με βάση τα προαναφερόμενα, μπορούμε να πούμε ότι η ιστορική δημιουργία και εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών είναι σε θέση να αποτελέσει πηγή άντλησης διάφορων δραστηριοτήτων για τη διδακτική τους προσέγγιση. Με τον τρόπο αυτό, εξάλλου, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εμπλακούν σε καταστάσεις έρευνας και να κατανοήσουν σε βάθος μια μαθηματική έννοια και, το πιο σημαντικό, να απομυθοποιήσουν τα μαθηματικά συνειδητοποιώντας την καθαρά κοινωνική και πολυπολιτισμική τους διάσταση. Πάντως, το ερώτημα αν πράγματι η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαίδευση βελτιώνει τη δόμηση και ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών στα παιδιά, παραμένει αναπάντητο και ίσως χρειαστούν αρκετές ακόμη ερευνητικές προσπάθειες, για να φτάσουμε στην απάντησή του.

Διδακτική των Μαθηματικών: Θεωρίες - αρχές - παράγοντες

Τα παιδιά «μαθαίνουν» Μαθηματικά μέσα από τη διαδικασία της αναδιοργάνωσης των γνωστικών δομών που ήδη διαθέτουν. Όμως, για να «αναγκαστεί» το παιδί να οικοδομήσει νέες γνωστικές δομές, πρέπει προηγουμένως να έρθει αντιμέτωπο με προβληματικές καταστάσεις οι οποίες ενδεχομένως να περιλαμβάνουν την επίλυση μιας αντίφασης, τη δικαιολόγηση ενός αποτελέσματος που προκαλεί έκπληξη, την εξήγηση μιας λύσης ή ακόμη και τη διευθέτηση συγκρουόμενων απόψεων (Cobb, Wood & Yackel, 1991, pp. 157-176). Τέτοιου είδους καταστάσεις, εξάλλου, μπορούν να βιώσουν οι μαθητές καθώς προσπαθούν να λύσουν διάφορα πρακτικά προβλήματα της άμεσης καθημερινότητάς τους, βασιζόμενοι στις μέχρι τώρα θεωρήσεις τους για διάφορες έννοιες και διαδικασίες. Αυτό, βέβαια, δεν σημαίνει ότι και αυτές οι προγενέστερες –κάθε είδους– γνώσεις των παιδιών δεν έχουν τη δική τους αξία και συμβολή στη δόμηση της νέας γνώσης. Σε αντίθεση με την παραδοσιακή διδασκαλία, οι άτυπες ή διαισθητικές γνώσεις των μαθητών αποτελούν το εφαλτήριο για το άλμα σε καινούργια γνωστικά επιτεύγματα.

Στην παραδοσιακή προσέγγιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών, ο όρος «πρόβλημα» είναι συνυφασμένος με τα στερεότυπα προβλήματα-ασκήσεις που αναφέρονται στο τέλος κάθε διδακτικής ενότητας των εγχειριδίων των Μαθηματικών. ΄Ετσι, το πρόβλημα χρησιμοποιείται ως το μέσο εκείνο που θα βοηθήσει τους μαθητές να εφαρμόσουν και να εμπεδώσουν τη νέα γνώση. Ο Freudenthal (1983) χαρακτηρίζει αυτή τη χρήση του προβλήματος ως ιστορικά αβάσιμη, υποστηρίζοντας ότι η ιστορική μελέτη της εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών δείχνει ότι η λύση πρακτικών προβλημάτων της καθημερινής ζωής αποτέλεσε τη βάση από την οποία ξεκίνησε η ανάπτυξή τους. Τέτοιες δε καταστάσεις προβληματισμού είναι δυνατό να προκύπτουν μέσα από τις διδακτικές δραστηριότητες που σχεδιάζει ο δάσκαλος ή μέσα από συζητήσεις με τους μαθητές του κατά τη διάρκεια των μαθημάτων. Ευνόητο είναι, λοιπόν, πως σε τίποτε δεν εξυπηρετεί τον δάσκαλο η αναζήτηση τρόπων που διευκολύνουν τη μετάδοση των μαθηματικών γνώσεων στους μαθητές του. Απεναντίας, το βασικό στόχο της διδακτικής του προσέγγισης σηματοδοτεί η δημιουργία καταστάσεων προβληματισμού, οι οποίες θα λειάνουν το έδαφος για τη δόμηση και ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης από τους ίδιους τους μαθητές, μέσα σε μια σχολική τάξη που λειτουργεί ως περιβάλλον μάθησης τόσο για τα παιδιά όσο και για τον ίδιο τον δάσκαλο.

Σε ένα τέτοιο περιβάλλον μάθησης, τα λάθη που κάνουν οι μαθητές μπορεί να παίξουν καθοριστικό ρόλο στην πορεία της δόμησης και ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης. Εξάλλου, όπως τονίζει και ο Cipra (1985), « ... όποιος ασχολείται με την επιστήμη ξέρει καλά ότι η δύναμή του δεν προέρχεται από το αλάνθαστο, αλλά αντίθετα από την ικανότητά του για συνεχή αυτοδιόρθωση». Είναι γεγονός ότι μέχρι σήμερα ο δάσκαλος δεν έδινε τη βαρύτητα που αρμόζει στα λάθη των μαθητών του. Όχι σπάνια δε, τα θεωρούσε αποτέλεσμα ελλιπούς γνώσης ή ακόμη και συνέπεια της απροσεξίας των παιδιών. Η νέα διδακτική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών βασίζεται στην επανεξέταση των απόψεων και πρακτικών των δασκάλων για τα λάθη των μαθητών. Αν οι δάσκαλοι δεν δεχτούν τη φυσική παρουσία των λαθών στην πορεία οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης των μαθητών τους, τότε είναι αδύνατο να επιτευχθεί μια ουσιαστική επικοινωνία με τους μαθητές. Σύμφωνα δε με την άποψη του Labinowicz (1987), η άποψη που έχει ο δάσκαλος για τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών αντανακλάται άμεσα στον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζει τα λάθη των μαθητών του. Ο δάσκαλος που θέλει να αντιμετωπίσει με βάση τη σύγχρονη διδακτική προσέγγιση των Μαθηματικών τα λάθη που κάνουν οι μαθητές του οφείλει (Wood, Cobb και Yackel, 1991):

- να ακούει προσεκτικά και να προσπαθεί να ερμηνεύσει τις ιδέες των παιδιών· να παρωθεί τους μαθητές του να αναλύουν και να εξηγούν στην τάξη τον τρόπο με τον οποίο αντιμετώπισαν μία προβληματική κατάσταση και να προσπαθεί να δει τα πράγματα από τη δική τους οπτική γωνία·
- να μη σχολιάζει θετικά ή αρνητικά τις απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές, αλλά να προσπαθεί με τον τρόπο του να ακούει και να συζητά τις σκέψεις όλων των παιδιών·
- να θέτει το λάθος ως ζήτημα προς συζήτηση από τα μέλη της μαθητικής κοινότητας·
- να κατασκευάζει καινούρια προβλήματα με αφορμή τα λάθη των μαθητών του.

Από την κατασκευαστική θεωρία της γνώσης προκύπτει ότι η ουσιαστική δόμηση και ανάπτυξη των βασικών μαθηματικών εννοιών σχετίζεται άμεσα με τη διαδικασία λύσης προβλημάτων (Thompson, 1985· Von Glassrsfeld, 1987). Η διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας απαιτεί από τον δάσκαλο την αναζήτηση φαινομένων (πραγματικών) των οποίων η ερμηνεία αναγκάζει τον μαθητή να υποθέσει, να πειραματιστεί, να ερευνήσει, να επανακατασκευάσει, να προβεί σε συμπεράσματα, με τελικό στόχο την οικοδόμηση και ανάπτυξη της μαθηματικής έννοιας. Αν για μια συγκεκριμένη έννοια (μαθηματική) ο δάσκαλος δεν μπορεί να βρει τέτοια φαινόμενα, τότε αποτελεί ουτοπία η διδασκαλία της έννοιας στους μαθητές του με οποιαδήποτε διδακτική προσέγγιση, γιατί, αν ο δάσκαλος δεν είναι σε θέση να ανακαλύψει κάτι για το οποίο θα μιλήσει με πάθος στους μαθητές του, τότε ίσως είναι προτιμότερο να σωπάσει (Παΐζη, 1987). Έτσι, στη σχολική τάξη η «κατασκευή» των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές είναι στην ουσία μια μορφή επανα-κατασκευής της μαθηματικής γνώσης, η οποία ξεπηδά άμεσα από την ανάγκη εξήγησης-ερμηνείας των πραγματικών φαινομένων.

Με βάση τα παραπάνω, η επίλυση διάφορων προβληματικών καταστάσεων που βασίζονται σε πραγματικές-καθημερινές ανάγκες των παιδιών αποτελεί την καρδιά ενός καινοτόμου, ευέλικτου και αποτελεσματικού Αναλυτικού Προγράμματος των Μαθηματικών, όχι απαραίτητα ως ανεξάρτητη θεματική περιοχή, αλλά ως βασικός άξονας γύρω από τον οποίο θα οργανωθεί η διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών. Η επίλυση προβλημάτων είναι το μέσο εισαγωγής, κατανόησης, σύνδεσης και εξάσκησης των μαθηματικών εννοιών. Η θεματολογία των προβλημάτων διαφέρει ανάλογα με τη βαθμίδα εκπαίδευσης στην οποία αυτά αναφέρονται. Έτσι, στις πρώτες βαθμίδες της εκπαίδευσης συνιστώνται προβλήματα που σχετίζονται με τα καθημερινά βιώματα, τις ανάγκες, τις εμπειρίες και τις ενασχολήσεις των παιδιών, ενώ σταδιακά στις μεγαλύτερες βαθμίδες εκπαίδευσης, η θεματολογία των προβλημάτων μπορεί να αντλεί υλικό από περισσότερο αφηρημένα θέματα και καταστάσεις. Η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων στη σχολική τάξη είναι δυνατό να ακολουθήσει τις παρακάτω τέσσερις φάσεις:

1. Οι μαθητές λύνουν ένα μαθηματικό πρόβλημα σε μικρές ομάδες εργασίας. Ο δάσκαλος ζητά από ένα μαθητή να ανακοινώσει στην τάξη τη λύση που βρήκε η ομάδα του.
2. Ο μαθητής ανακοινώνει τη λύση του προβλήματος και την εξηγεί.
3. Ο δάσκαλος συζητά με τα παιδιά την όλη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος και παρωθεί τους μαθητές του να εκφράσουν τις απορίες τους και τις τυχόν ενστάσεις τους για το συγκεκριμένο τρόπο επίλυσης έτσι, ώστε μια κοινά αποδεκτή λύση ή εξήγηση να επικρατήσει.
4. Ο δάσκαλος αναζητά από τους μαθητές διαφορετικούς τρόπους επίλυσης του προβλήματος. Η πρώτη φάση ξαναρχίζει.

Αξίζει στο σημείο αυτό να σημειωθεί ότι για τη λύση προβλημάτων σημαντικό ρόλο διαδραματίζει σήμερα και η εξοικείωση των μαθητών με τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές από τα πρώτα κιόλας χρόνια της εκπαίδευσής τους. Είναι γεγονός πως αρκετά προβλήματα λύνονται μόνο με νοερούς υπολογισμούς, κάποια άλλα απαιτούν τη συνηθισμένη μέθοδο με χαρτί και μολύβι, ενώ για πιο σύνθετους υπολογισμούς η χρήση υπολογιστών διευκολύνει αισθητά τη διαδικασία.

Συνεπώς, η διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών βασίζεται σε ορισμένες συνιστώσες μάθησης (μαθησιακές αρχές):

1. Η διαδικασία μάθησης των Μαθηματικών υπάγεται στο πλαίσιο κατασκευαστικών δραστηριοτήτων από τους μαθητές.
2. Η δόμηση μιας μαθηματικής έννοιας ή δεξιότητας αποτελεί μια διαδικασία μακρόχρονη, η οποία κινείται σε διαδοχικά επίπεδα αφαίρεσης.
3. Η μετάβαση από ένα γνωστικό επίπεδο σε ένα άλλο υψηλότερο απαιτεί νοητική ενεργοποίηση του μαθητή, ανατροφοδότηση και «προσωπικό αναστοχασμό». Αυτό σημαίνει ότι κάθε μαθητής κρίνει κάθε φορά τις ενέργειές του και τις γενικότερες στρατηγικές που χρησιμοποίησε για την αντιμετώπιση μιας προβληματικής κατάστασης, και επανοριοθετεί τη δράση του ανάλογα με το αποτέλεσμα.

4. Η διαδικασία της μάθησης συντελείται μέσα σε ένα συγκεκριμένο κάθε φορά κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο, οι συνθήκες του οποίου την επηρεάζουν άμεσα.
5. «Μαθαίνω Μαθηματικά» δεν σημαίνει απορροφώ ή κατανοώ γνώσεις και δεξιότητες που μου προσφέρονται έτοιμες από τον δάσκαλο, αλλά εντάσσω τις επιμέρους γνώσεις και δεξιότητες σε ένα δομημένο σύνολο, στο πλαίσιο ενός συγκεκριμένου κοινωνικο-πολιτιστικού περιβάλλοντος. Οι νέες γνώσεις είτε εντάσσονται αρμονικά στην ήδη υπάρχουσα γνώση (διαδικασία αφομοίωσης) είτε προκαλούν επαναδιάταξη της προϋπάρχουσας γνώσης (διαδικασία προσαρμογής).

Ένας ιδιαίτερα σημαντικός παράγοντας της διδακτικής των μαθηματικών είναι οι αντιλήψεις και απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη μαθηματική επιστήμη. Σύμφωνα με την παραδοσιακή αντίληψη, ο δάσκαλος μπορεί να διδάξει όλα τα μαθήματα του δημοτικού σχολείου, φτάνει να διαθέτει άριστη παιδαγωγική κατάρτιση. Η αντίληψη αυτή σήμερα δεν είναι αποδεκτή. Είναι γεγονός ότι ο δάσκαλος θα πρέπει, σύμφωνα με τη σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών, να έχει μια βαθύτερη αντίληψη των μαθηματικών εννοιών και της σημασίας τους στην ανθρώπινη καθημερινότητα. Να βιώσει πρώτα ο ίδιος ως εκπαιδευτικός και ως άνθρωπος την αναγκαιότητα της δημιουργίας των μαθηματικών καθώς και των ποικίλων εφαρμογών τους στην ανθρώπινη εξέλιξη, για να μπορέσει να βοηθήσει τους μαθητές του στη δόμηση και ανάπτυξη της μαθηματικής τους γνώσης (Φιλίππου & Χρίστου, 2002, σσ. 213-214).

Η διδακτική προσέγγιση των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου

Η Αριθμητική δεν αποτελεί μια συλλογή δεξιοτήτων από τα παιδιά. Ο δάσκαλος οφείλει να γνωρίζει σε τι είδους μάθηση μετέχει το παιδί και με ποιο τρόπο λαμβάνει χώρα αυτή η μάθηση. Αυτό είναι απαραίτητο για την εννοιολογική διαμόρφωση των κατάλληλων αρχών διδασκαλίας. Οι δεξιότητες απαιτούν συνήθως μηχανική εκτέλεση και τελειοποιούνται από τους μαθητές με τη βοήθεια της εξάσκησης. Υπό το πρίσμα αυτό, η μάθηση, για παράδειγμα, της γραφής των αριθμών αποτελεί ενμέρει μια δεξιότητα. Η μάθηση όμως των τεσσάρων πράξεων των φυσικών αριθμών απαιτεί λογικομαθηματική σκέψη και η σκέψη αναμφισβήτητα δεν είναι δεξιότητα. Η σκέψη δεν αναπτύσσεται ούτε τελειοποιείται μέσα από την εξάσκηση. Έτσι, για παράδειγμα, μπορούμε να διδάξουμε στους μαθητές μας τις δεκάδες και τις μονάδες μόνον εφόσον προηγουμένως έχουν οικοδομήσει τις μονάδες (Kamii & DeClark, 1995).

Η διδασκαλία «δεξιοτήτων» και τεχνικών μεθόδων για την πραγματοποίηση των πράξεων στην ηλικιακή περιοχή των δύο πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου εμποδίζει την αυτόνομη ανάπτυξη της λογικομαθηματικής σκέψης και αδειάζει από περιεχόμενο τις νοητικές ενέργειες των μαθητών οδηγώντας τους σε «μαθηματικοφοβία». Για το λόγο αυτό, η Kamii (1997, σσ. 30-31) διατείνεται πως στην Α′ και στη Β′ τάξη του δημοτικού σχολείου δεν θα πρέπει οι εκπαιδευτικοί να διδάσκουν αριθμητικούς κανόνες του τύπου: «μεταφέρουμε» ή «δανειζόμαστε» κ.τ.λ., γιατί τέτοιου είδους κανόνες αποτελούν εμπόδιο στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των παιδιών. Κι αυτό, διότι:

α) οι μαθητές αναγκάζονται να εγκαταλείψουν και να μη χρησιμοποιούν τη δική τους σκέψη, και
β) αυτοί οι κανόνες δεν διδάσκουν τις έννοιες των μονάδων, των δεκάδων κ.τ.λ., οπότε εμποδίζουν τα παιδιά να αναπτύξουν την έννοια του αριθμού.

Τα παιδιά δεν χρειάζονται άμεση διδασκαλία για να αναπτύξουν τη λογικομαθηματική τους σκέψη. Όταν βρεθούν αντιμέτωπα με μια προβληματική κατάσταση που τους προκαλεί σύγκρουση, έκπληξη ή τους οδηγεί σε αντίφαση, συχνά καταλήγουν σε σκέψη υψηλότερου επιπέδου. Η ανάπτυξη αριθμητικών δραστηριοτήτων μέσα από καθημερινές καταστάσεις δεν σημαίνει ότι περιγράφουμε στα παιδιά μια κατάσταση της καθημερινότητας και ζητούμε από αυτά την επίλυσή της, αλλά ότι αναθέτουμε στα παιδιά την ευθύνη να αναζητήσουν απάντηση σε αριθμητικά προβλήματα που πηγάζουν από την καθημερινότητα της σχολικής ζωής στην τάξη. Επίσης, καλό είναι οι δραστηριότητες που δίνει ο εκπαιδευτικός στα παιδιά να τους ζητούν να *κάνουν* κι όχι μόνο να *πουν* κάτι, γιατί με τον τρόπο αυτό καλλιεργείται η ενεργητικότητα της σκέψης, που είναι ιδιαίτερα σημαντική στην οικοδόμηση και ανάπτυξη της λογικομαθηματικής γνώσης των παιδιών.

Φυσικά, στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου μεγάλη σημασία παίζουν και τα υλικά (πραγματικά και συγκεκριμένα, εικονικές παραστάσεις) που παρέχονται στα παιδιά για τη διαχείριση των προβληματικών καταστάσεων τις οποίες καλούνται από τον εκπαιδευτικό να αντιμετωπίσουν. Η εφευρετικότητα καθώς και η δυνατότητα ανακάλυψης που έχουν τα παιδιά σε όλα τα περιβάλλοντα μάθησης είναι ανάλογες με τα είδη και τον αριθμό των υλικών που διαθέτουν κάθε φορά (Nicholson, 1984).

Τα παιδιά μαθαίνουν μαθηματικές έννοιες και κατανοούν μαθηματικές ιδέες όχι συσχετίζοντας και απορροφώντας άμεσα από το περιβάλλον, αλλά αφομοιώνοντας την καινούργια γνώση στις ιδέες που έχουν ήδη οικοδομήσει. Έτσι, τα παιδιά μπορούν σχετικά εύκολα να αφομοιώσουν, για παράδειγμα, τα αριθμητικά ψηφία, γιατί οι ποσότητες οικοδομούνται πρώτες. Μια πράξη (+ ή -), όμως, πάνω σ' αυτές τις ποσότητες είναι υψηλότερο επίπεδο αφαιρετικής σκέψης και η προκύπτουσα σχέση της ισότητας (=) ακόμα υψηλότερο επίπεδο, με αποτέλεσμα οι μαθητές να δυσκολεύονται περισσότερο στην κατανόησή τους. Μόνον εφόσον το παιδί οικοδομήσει μια ιεραρχική σχέση θα είναι σε θέση να κατανοεί μια μαθηματική πρόταση τύπου εξίσωσης (π.χ. 3+_=7). Μόνο τότε θα είναι σε θέση όχι απλώς να λύνει, αλλά να κατανοεί εξισώσεις που περιλαμβάνουν άγνωστους προσθετέους (δηλαδή, μετά τη Β′ τάξη του δημοτικού) (Brun, 1981).

Επομένως, δεν συνάδει με τη σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών να δίνονται «εξισώσεις» του τύπου: $4 + \_ = 9$ ή $2 + 4 = \_$ σε μαθητές της Α΄ Δημοτικού, γιατί σχέσεις τέτοιου τύπου απαιτούν από το παιδί αντιστρέψιμη σκέψη (και ικανότητα εγκλεισμού των τάξεων), που οι μαθητές του συγκεκριμένου ηλικιακού φάσματος δεν διαθέτουν ακόμα.

Το παιδί οικοδομεί την Αριθμητική λογικοαριθμητικοποιώντας την πραγματικότητα. Π.χ., «έχεις τρεις τσίχλες και σου δίνει και ο αδελφός σου άλλες δύο». Αυτό είναι το είδος της πραγματικότητας από την οποία το παιδί (στην Α΄ Δημοτικού) δημιουργεί τη γνώση του 3+2. Το να ζητήσεις από το παιδί να απομνημονεύσει το άθροισμα 3+2 κ.ο.κ. απουσία περιεχομένου είναι αντίθετο με τη διαδικασία δόμησης της ανθρώπινης γνώσης έξω από τη σχολική τάξη. Αν αφήσουμε τα παιδιά μόνα τους να προσθέσουν αριθμούς, τότε θα βρουν μόνα τους τον καταλληλότερο γι' αυτά τρόπο. Αν δεν τον βρουν, τότε αυτό σημαίνει ότι η πρόσθεση είναι πολύ δύσκολη για τις ικανότητές τους και είναι απαράδεκτο να τους την επιβάλλει ο δάσκαλος με το ... «έτσι θέλω»! Επίσης, αν αφήσουμε τα παιδιά της Πρώτης Δημοτικού να αριθμούν συλλογές αντικειμένων, τα περισσότερα από αυτά θα σταματήσουν σε μια δεδομένη χρονική στιγμή να απαριθμούν ένα-ένα και θα αριθμούν με πιο οικονομικές μεθόδους αρίθμησης, όπως τα νήπια που, μόλις μάθουν να περπατούν, σταματούν το μπουσούλημα.

Επίλογος

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι το σύνθετο ζήτημα της διδακτικής των μαθηματικών εννοιών στη βασική εκπαίδευση έχει πολλές πτυχές, που, για να διερευνηθούν, απαιτείται μεγάλη και μακροχρόνια ερευνητική προσπάθεια.

Το βέβαιο είναι πως, αν επιθυμούμε την οργάνωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών προς μια κατεύθυνση που θα σέβεται την αυτονομία του παιδιού και θα προωθεί τις προσπάθειές του για την οικοδόμηση και την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, τότε θα πρέπει οι εκπαιδευτικοί της βασικής εκπαίδευσης να ενημερωθούν σφαιρικά και να ευαισθητοποιηθούν σχετικά με τα σύγχρονα πορίσματα της διδακτικής των Μαθηματικών.

Με τον τρόπο αυτό θα βοηθήσουν τα παιδιά να συνδέσουν τις μαθηματικές τους εμπειρίες με τα σχολικά Μαθηματικά έτσι, ώστε να μην τα θεωρούν ως ένα σύνολο από κανόνες χωρίς νόημα για τα ίδια.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση:

Arcavi, A. & Bruckheimer, M. (2000). Didactical uses of primary sources from the History of Mathematics. *Themes in Education*, vol. 1.

Brun, J. (1981). *La représentation symbolique d'opérations additives en situation d'interaction de communication. Paper presented at the meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Grenoble.

Cipra, B. (1985). *Erreures*. Paris, Intereditions.

Cobb, P., Wood, T. & Yackel, E. (1991). A constructivist approach to second grade mathematics. In E. Von Glaserfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Confrey, J. (1991). Learning to Listen: A student's understanding of powers of ten. In E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical Construction in Mathematics Education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethno mathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics, For the *Learning of Mathematics*, 5 (1).

Fauvel, J. & Van Maamen, J. (1997). The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics, Discussion Document for an I C M I study. Στο: *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, τεύχος 2.

Freudenthal, H. (1983). *Didactic phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Gravemeijer, K. (1991). An instruction – Theoretical reflection on the use of manipulatives. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school*. Utrecht: Centrum voor Didactiek van de b- Wetenschappen.

Labinowicz, E. (1987). Children's right to be wrong. *Arithmetic Teacher*, 2 & 20.

Nicholson, S. (1984). The theory of loose parts. Στο: G. Coates (Ed.), *Alternative learning environments*. Stroudsburg, P.A.: Dowden, Hutchinson, and Ross.

Thompson, P. (1985). Experience, problem solving and learning mathematics: Considerations in developing mathematical curricula. Στο E. A. Silver (Ed.). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 189-236). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Von Glasersfeld, E. (1990). An exposition of constructivism: why some like it radical. *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph number 4.

Von Glassrfeld, E. (1987). Learning as a constructive activity. Στο C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 3-18). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wood, J., Cobb, P. & Yackel, E. (1991). Change in Teaching Mathematics: A Case Study, *American Educational Research Journal*, 28 (3), 587-616.

Ελληνόγλωσση:

Γαγάτσης, Α. (1993). *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Αδελφοί Κυριακίδη.

Εξαρχάκος, Θ. (2001). *Ιστορία των Μαθηματικών*. Τόμος Α′, Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων.

Εξαρχάκος, Θ. (2001). *Ιστορία των Μαθηματικών*. Τόμος Β′, Τα Μαθηματικά των Ινδών και των Κινέζων.

Heath, Thomas L. (2001). *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*. Τόμος Ι. *Από το Θαλή στον Ευκλείδη*. Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.

Heath, Thomas L. (2001). *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*. Τόμος ΙΙ. *Από τον Αρίσταρχο στον Διόφαντο*. Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.

Kamii, C. & DeClark, G. (1995). *Τα παιδιά ξαναεφευρίσκουν την Αριθμητική* (μτφρ. Γ. Ζακοπούλου). Αθήνα: Πατάκης.

Kamii, C. (1997). *Για μια αναμόρφωση της Προσχολικής Εκπαίδευσης*. Αθήνα: Πατάκης.

Καφούση, Σ. (2002). Η Ιστορία των Μαθηματικών ως Πηγή Κατασκευής Δραστηριοτήτων στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. Στο: Καΐλα, Μ., Καλαβάσης, Φ. & Πολεμικός, Ν. (επιμ.), *Μύθοι, Μαθηματικά, Πολιτισμοί: Αποσιωπημένες σχέσεις στην εκπαίδευση*. Αθήνα: Ατραπός.

Κολέζα, Ε. (2000). *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*. Αθήνα: Leader Books.

Κοτοπούλης, Β. Θ. (2004). *Η οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης των νηπίων και η ανάπτυξή της στους μαθητές των Α′ και Β′ τάξεων του Δημοτικού Σχολείου*. Διδακτορική Διατριβή. Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Παΐζη, Ν. (1987). Τα μαθηματικά και η εκπαίδευση του υποψήφιου δασκάλου των μαθηματικών, *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τ. 36, σ. 91

Φιλίππου, Γ. & Χρίστου, Κ. (2002). Ιστορία και μάθηση των Μαθηματικών. Στο: Καΐλα, Μ., Καλαβάσης, Φ., Πολεμικός, Ν. (Επ.). *Μύθοι, Μαθηματικά, Πολιτισμοί: Αποσιωπημένες σχέσεις στην εκπαίδευση*. Αθήνα: Ατραπός.