Αντιλήψεις μαθητών Στ′ Δημοτικού για τα κλάσματα

Αχιλλέας Γιαννέλος
Δάσκαλος, Κοινωνιολόγος, MSc Συμβουλευτικής, Δρ. Παιδαγωγικών
Πανεπιστημίου Αθηνών

Όπως προκύπτει από έρευνες του Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας, το επίπεδο των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών στο τέλος του Δημοτικού είναι αρκετά χαμηλό, δίνοντας μια μάλλον κακή εικόνα για τη μαθηματική εκπαίδευση στο ελληνικό σχολείο (Τσακαλίδης, 2006 www.kee.gr, 2008). Κάποιες μελέτες, διερευνώντας τα λάθη που κάνουν οι μαθητές στη χρήση των ρητών αριθμών, αναφέρουν ότι αυτά οφείλονται στην έλλειψη κατανόησης της έννοιας του κλάσματος, της έννοιας της ισοδυναμίας και των πράξεων μεταξύ τους (Φιλίππου, 1991· Τζεκάκη, 2000).

Το ζήτημα της κατανόησης της έννοιας του κλάσματος αποκτά ιδιαίτερο και πρόσθετο ενδιαφέρον, καθώς τα τελευταία χρόνια έχουν εισαχθεί στα δημοτικά σχολεία νέα αναλυτικά προγράμματα και νέα διδακτικά βιβλία, τα οποία, ειδικά για τα μαθηματικά, θέτουν νέους στόχους αλλά και εκφράζουν νέες διδακτικές προσεγγίσεις για το θέμα αυτό (ΥΠΕΠΘ, 2002).

Επιπλέον, αλλά και σε συνδυασμό με τα προηγούμενα, παρατηρούμε έντονο προβληματισμό σε συνέδρια και ημερίδες οι οποίες αφορούν και το συγκεκριμένο ζήτημα γενικότερα, αλλά και τον τρόπο με τον οποίο τα νέα βιβλία και αναλυτικά προγράμματα προσεγγίζουν αυτό το θέμα (κλάσματα), καθώς και ζητήματα που αφορούν τη διάταξη και την ποσότητα της ύλης γύρω από αυτό. Στο νέο πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά, παρ' όλα τα σύγχρονα στοιχεία, εντοπίζονται σε αυτά ως ανασταλτικοί παράγοντες η μεγάλη ποσότητα της ύλης και η μη συστηματική ανάπτυξη των εννοιών (Τζεκάκη, www.kee.gr).

Η διερεύνηση του θέματος αποκτά μεγαλύτερο ενδιαφέρον, καθώς για τη συγκεκριμένη σχολική ηλικία δεν διαπιστώνεται επαρκής και ικανοποιητικός αριθμός ερευνών γύρω από αυτό το ζήτημα.

Από την ανασκόπηση των υπαρχουσών ερευνών σχετικά με το ζήτημα της αποτυχίας και των λαθών των μαθητών στην κατανόηση και τη διαχείριση των κλασμάτων προκύπτει ότι αυτή μπορεί να οφείλεται στο ότι: α) τα κλάσματα (και η χρήση τους) δεν είναι φυσικοί αριθμοί, αλλά μια κοινωνικά κατασκευασμένη έννοια (διαδικασία) η οποία έγινε για να εξυπηρετήσει συγκεκριμένες ανάγκες. Αντίθετα, οι φυσικοί αριθμοί δεν είναι μια προκατασκευασμένη γνώση σε ένα κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο, αλλά αποτελούν την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών και επηρεάζουν τη μετάβαση στους ρητούς. Επιπλέον, και σε σχέση με το παραπάνω, η καθημερινότητα του μαθητή αποτελείται από «ολόκληρα» πράγματα (Μπουρίκα, 2002). Έτσι, πολλές φορές οι μαθητές προβαίνουν στο χειρισμό των κλασματικών αριθμών με τη λογική των ακεραίων (για παράδειγμα, δεν συνειδητοποιούν ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής έχουν συγκεκριμένη σχέση μεταξύ τους, αλλά τους θεωρούν δύο ανεξάρτητους αριθμούς)· β) δεν γίνεται διδασκαλία και ενεργοποίηση όλων των νοητικών σχημάτων-μοντέλων του κλάσματος, δηλαδή του κλάσματος ως «μέρους-όλου», του κλάσματος ως «πηλίκου», του κλάσματος ως «λόγου», του κλάσματος ως «τελεστή», του κλάσματος ως «μέτρησης»[1]. Θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε μια άλλη προσπάθεια να διερευνηθούν οι δυσκολίες διδασκαλίας και κατανόησης των νοητικών σχημάτων. Πιθανώς η έλλειψη δυνατότητας και ευχέρειας των μαθητών να ενεργοποιούν το κατάλληλο νοητικό σχήμα, αυτό που κάθε φορά απαιτείται για την κατανόηση και το χειρισμό των δεδομένων της ανάλογης προβληματικής κατάστασης, να σχετίζεται με ενδεχόμενη επιλεκτική έμφαση της διδασκαλίας σε ορισμένα μόνο νοητικά σχήματα.

Πιθανολογούμε ότι η ενδεχόμενη έμφαση στο σχήμα «μέρος-όλο», καθώς το σχήμα αυτό αντιπροσωπεύει το πρωταρχικό σχήμα διδασκαλίας κατά την εισαγωγή της έννοιας του κλάσματος στις μικρότερες τάξεις, σε συνδυασμό με την παρουσίαση του «όλου» ως μιας συνεχούς ποσότητας (ένα μήλο, μία πίτσα) και όχι διακριτής ποσότητας (σύνολο μήλων ή αντικειμένων) ίσως οδηγεί σε «υπεργενίκευση» του σχήματος από τον μαθητή, με έμμεσες συνέπειες στο βαθμό επιτυχίας των στόχων του μαθήματος, οι οποίοι αφορούν στην καλλιέργεια, ενεργοποίηση και επίκληση του ενδεικνυόμενου κάθε φορά σχήματος, ανάλογα με την προβληματική κατάσταση που αντιμετωπίζει.

Από την επισκόπηση των βιβλίων μαθηματικών της Στ′ τάξης διαπιστώνουμε ότι οι στόχοι που διατυπώνονται αφορούν και σχετίζονται με την ενεργοποίηση και καλλιέργεια όλων των νοητικών σχημάτων-μοντέλων που αφορούν την έννοια του κλάσματος. Έτσι, συγκεκριμένα, παρατηρούμε ως στόχους «τη μελέτη της έννοιας του κλάσματος ως μέρος του όλου», τη «σύγκριση κλάσματος με ακέραιη μονάδα», τη «μετατροπή κλάσματος σε μεικτό και αντίστροφα» (ΥΠΕΠΘ, 2005β, ενότητα 19). Η διατύπωση των στόχων συνεχίζεται με τη «διαπίστωση ότι το κλάσμα είναι το πη-

1 Το νοητικό σχήμα «μέρος-όλο» σχετίζεται με την αντίληψη που θεωρεί το ρητό αριθμό ως μια ολότητα, η οποία συντίθεται από ένα συγκεκριμένο πλήθος διακριτών μερών. Έτσι, σύμφωνα με το σχήμα αυτό, στο κλάσμα α/β το «όλο» χωρίζεται σε β κομμάτια. Το α/β αναπαριστά τα α κομμάτια από τα β. Στο νοητικό σχήμα «πηλίκο», το κλάσμα α/β, θεωρεί τον ρητό ως διαίρεση α πραγμάτων σε β ίσα μέρη. Στο μοντέλο αυτό το κλάσμα α/β σημαίνει «διαίρεσε το α με το β», αλλά και ότι το αποτέλεσμα της πράξης αυτής είναι α/β, και επιπλέον ότι δεν είναι απαραίτητο το α και το β να παριστάνουν αντικείμενα ίδιου είδους. Στο νοητικό σχήμα «λόγος» το κλάσμα εκφράζει τη σχέση δυο ποσοτήτων συγκρίνοντας μεταξύ τους τα μεγέθη αυτών των δυο ποσοτήτων, χωρίς να υπάρχει επιμερισμός μιας ποσότητας αντικειμένων όπως στα σχήματα «μέρος-όλο» και «πηλίκο». Στο νοητικό σχήμα «τελεστής» το κλάσμα λειτουργεί ως μετασχηματιστής, ο οποίος μετατρέπει μια ποσότητα σε μια άλλη ποσότητα (λειτουργεί ως συνάρτηση). Τέλος, στο νοητικό σχήμα «μέτρηση» το κλάσμα α/β θεωρείται ένα σημείο πάνω σε άξονα (αριθμογραμμή). Η απόσταση στην οποία τοποθετείται προκύπτει από τις α επαναλήψεις του μοναδιαίου κλάσματος 1/β. Όλα αυτά τα σχήματα-μοντέλα, αν και είναι εννοιολογικές κατασκευές για διαφορετικές καταστάσεις του ρητού, είναι προφανές ότι συνδέονται μεταξύ τους (www. univencity of West Macedonia/Παιδαγωγικό Τμήμα Φλώρινας, 2008).

λίκο μιας διαίρεσης», την «αναγνώριση και δημιουργία ισοδύναμων κλασμάτων», τη «μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό», την «τοποθέτηση του κλάσματος στην αριθμογραμμή» (ΥΠΕΠΘ, 2005β, ενότητες 20, 21 και 22). Είναι προφανές ότι συνολικά γίνεται επίκληση και επισημαίνεται η ανάγκη ανάδειξης των μοντέλων του κλάσματος ως «μέρους-όλου», του κλάσματος ως «πηλίκου» και του κλάσματος ως «μέτρησης». Από την επισκόπηση των δραστηριοτήτων για τις ίδιες διδακτικές ενότητες στο βιβλίο του μαθητή και στο τετράδιο εργασιών παρατηρούμε ότι το «όλο», η ποσότητα η οποία θα επιμεριστεί, ορίζεται και ως συνεχής ποσότητα και ως διακριτή (ΥΠΕΠΘ, 2005α, ενότητες 20, 21 και 22).

Η έρευνα

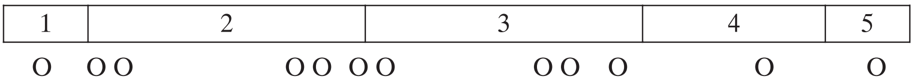
Σκοπός αυτής της μικρής κλίμακας περιγραφικής έρευνας ήταν να διερευνήσει και να καταγράψει τις υπάρχουσες αντιλήψεις των μαθητών Στ′ τάξης Δημοτικού για τα κλάσματα. Επιμέρους στόχοι της έρευνας ήταν: α) η κατηγοριοποίηση των διαστρεβλωμένων αντιλήψεων των μαθητών για τα κλάσματα, β) ο εντοπισμός των νοητικών σχημάτων για τα οποία δεν γίνεται ενεργοποίηση και χρήση από τους μαθητές κατά τη διαχείριση του κλάσματος στις περιπτώσεις που αυτό απαιτείται, γ) ο σχολιασμός και ο εντοπισμός των πιθανών αιτιών για τις αντιλήψεις αυτές. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά το μήνα Μάιο του 2009, ενώ στους στόχους της δεν περιλαμβάνονταν η διερεύνηση της επίδρασης πιθανών διαφοροποιητικών παραγόντων, όπως φύλο, κοινωνικο-οικονομικό επίπεδο, σχολική επίδοση, ρόλος νέων αναλυτικών προγραμμάτων κ.λπ. στις αντιλήψεις των μαθητών για τα κλάσματα. Συμμετείχαν 200 μαθητές της Στ′ τάξης της ευρύτερης περιοχής Αθηνών-Πειραιά με συμπτωματική δειγματοληψία. Το φύλλο με τις δραστηριότητες συμπληρώθηκε μέσα στην τάξη με την παρουσία του ερευνητή, ο οποίος έδινε τις απαραίτητες διευκρινίσεις όπου χρειαζόταν, και του δασκάλου της τάξης. Το μεθοδολογικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε προκειμένου να εξυπηρετηθεί ο σκοπός της έρευνας ήταν φυλλάδιο (Μπούφη, 1998) οι ερωτήσεις του οποίου αναφέρονταν σε διάφορες διαστάσεις της έννοιας του κλάσματος και απαιτούσαν την ενεργοποίηση και χρήση διάφορων νοητικών σχημάτων για τα κλάσματα ανάλογα με την περίσταση κάθε φορά. Ειδικότερα, σχετίζονταν με την αντίληψη της βασικής έννοιας του κλάσματος, το νοητικό σχήμα «μέρος-όλο», τον επιμερισμό σε ίσα μέρη, την περίπτωση που το «όλο» δεν είναι συνεχής ποσότητα, αλλά διακριτή, το νοητικό σχήμα «μέτρηση» και τη συσχέτιση του κλάσματος με μια ποσότητα την οποία αυτό αναπαριστά και, κατ' επέκταση, την αντίληψη της αξίας του κλάσματος, τις δεξιότητες μετατροπής του μεικτού σε κλάσμα, τη σύγκριση κλασμάτων και την έκφραση δεδομένων με κλάσματα.

Όπως είναι φυσικό, όλες οι παραπάνω επιμέρους διερευνήσεις, παρόλο που παρουσιάζονται ως μεμονωμένες κάθε φορά, δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, καθώς όλα τα νοητικά σχήματα που αφορούν την αντίληψη της έννοιας του κλάσματος έχουν ένα κοινό πλαίσιο που τα συνδέει μεταξύ τους, το οποίο, όπως θα αναλυθεί στη συνέχεια, αφορά τις έννοιες της «διαμέρισης», της «μονάδας» και της «ισότητας», ως ενυπάρχουσες σε όλα τα σχήματα.

Οι ερωτήσεις του φυλλαδίου-ερωτηματολογίου που χορηγήθηκε στους μαθητές ήταν οι παρακάτω:

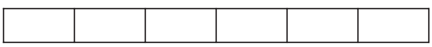
1. Πώς θα βοηθούσες ένα συμμαθητή σου να καταλάβει τι είναι το 1/3;

2. Η εικόνα που βλέπεις δείχνει τα 5 βαγόνια ενός τρένου. Να βρεις τι μέρος του τρένου είναι το τρίτο βαγόνι και να εξηγήσεις πώς σκέφτηκες.



Σχ. 2

3. Αν τα 6 κομμάτια που βλέπεις είναι 3/5 μιας σοκολάτας, πόσα κομμάτια είχε ολόκληρη η σοκολάτα; Δικαιολόγησε την απάντησή σου. Σχεδίασε ό,τι θέλεις και νομίζεις ότι θα σε βοηθήσει.



Σχ. 3

4. Δείξε με ένα βελάκι πού είναι το 1

Σχ. 4

5. Ο Κώστας και η Δήμητρα είχαν μια σοκολάτα. Ο Κώστας έφαγε το 1/8 της σοκολάτας και η Δήμητρα το 1/3 της σοκολάτας. Τι μέρος της σοκολάτας άφησαν;

6. Ο Κώστας ξόδεψε το 1/4 των χρημάτων του και ο Γιάννης το 1/2 των χρημάτων του. Είναι δυνατόν να ξόδεψαν τα ίδια χρήματα; Εξήγησε τη σκέψη σου.

7. Κύκλωσε ποιο από τα παρακάτω κλάσματα είναι ίσο με 3 2/5

5/5, 11/5, 17/5, 6/5

8.Ποιο από τα παρακάτω κλάσματα είναι το μεγαλύτερο;

6/12, 8/24, 3/4

9. Αν 4 φίλοι μοιράστηκαν δίκαια δυόμισι πίτσες, πόση πίτσα έφαγε ο καθένας; Εξήγησε πώς σκέφτηκες.

Αποτελέσματα της έρευνας

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας για κάθε ερώτηση του ερωτηματολογίου.

Η 1η ερώτηση είχε στόχο να καταγράψει το βαθμό κατά τον οποίο ο μαθητής είχε κατανοήσει ότι το κλάσμα δεν αναφέρεται αποκλειστικά σε διαμέριση συνεχών ποσοτήτων (ως «όλο») αλλά και διακριτών, και την αναπαράσταση που εμφανίζεται συχνότερα στους μαθητές.

Πίνακας 1 (απαντήσεις μαθητών στην ερώτηση 1)

ΤΟ «ΟΛΟ» ΠΟΥ ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΗΚΕ ΗΤΑΝ ΠΟΣΟΤΗΤΑ			
ΣΥΝΕΧΗΣ		ΔΙΑΚΡΙΤΗ	
f = 200	f % =100	f = 0	f % =0

Από τον Πίνακα 1 παρατηρούμε ότι όλοι οι μαθητές (100%) επιμέρισαν μια συνεχή ποσότητα, έναν κύκλο, ένα ορθογώνιο (ως «όλο»), σε τμήματα (χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν είναι σωστό) και κανένας δεν επιμέρισε διακριτή ποσότητα ως «όλο» (ένα σύνολο αντικειμένων το οποίο επιμέρισε σε υποσύνολα). Από το εύρημα αυτό πιθανόν να προκύπτει μονοδιάστατη και στενή αντίληψη της έννοιας του κλάσματος και ότι υπάρχει εμμονή στο «κόβω το ένα (1) στα τρία». Η πιθανή αυτή εμμονή δυσκολεύει την κατανόηση και του καταχρηστικού κλάσματος και του ότι η ποσότητα που αντιπροσωπεύει το κλάσμα εξαρτάται από την πληθικότητα του συνόλου στο οποίο αυτό ανάγεται. Σε άλλη έρευνα (Τσακαλίδης, 2006) οι μαθητές κατανοούσαν το κλάσμα ως μέρος «όλου», σε ποσοστό 93,8%, όταν το «όλο» αφορούσε συνεχή ποσότητα. Όταν όμως αφορούσε διακριτή ποσότητα, το ποσοστό των σωστών απαντήσεων έπεφτε στο 83,7%. Από την ίδια έρευνα προέκυψε ότι ποσοστό 20% των μαθητών δεν είχαν κατανοήσει την έννοια του καταχρηστικού κλάσματος.

Η 2η ερώτηση είχε στόχο να διερευνήσει τη δυνατότητα ενεργοποίησης από τους μαθητές του σχήματος «μέτρηση» και «αναπαράσταση ποσότητας» (η οποία σχετίζεται με την ειδική σχέση που υπονοείται ανάμεσα στους δύο όρους του κλάσματος).

Πίνακας 2 (απαντήσεις μαθητών στην ερώτηση 2)

ΕΔΩΣΑΝ ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ (1/3 ή 4/12)		ΕΔΩΣΑΝ ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ			
		3/5		3/15	
f =20	f % =10	f = 40	f % = 20	f = 160	f % =80

Από τον Πίνακα 2 προκύπτει ότι στην ερώτηση αυτή ποσοστό 20% των μαθητών απάντησαν ότι το 3^{ο} βαγόνι αντιπροσωπεύει τα 3/5. Φαίνεται ότι υπάρχει σύγχυση της βασικής έννοιας του κλάσματος, δηλαδή ότι οι όροι αντιπροσωπεύουν μια ειδική και συγκεκριμένη σχέση μεταξύ τους, με αποτέλεσμα ο μαθητής να σκέφτεται ότι το 3^{ο} βαγόνι είναι τα 3 από τα 5 συνολικά βαγόνια, άρα είναι τα 3/5, και αδυναμία έκφρασης των υποσυνόλων του «όλου» (βαγονιών) με κλάσματα. Είναι εμφανές ότι δεν έγινε ενεργοποίηση του νοητικού σχήματος «μέτρηση», καθώς το «όλο» έπρεπε να επιμεριστεί χρησιμοποιώντας ως μονάδα αναφοράς το 1^{ο} ή το 5^{ο} βαγόνι.

Ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών (80%) απάντησαν ότι το 3^{ο} βαγόνι είναι τα 3/15, προφανώς επειδή το άθροισμα της απαρίθμησης των βαγονιών είναι 15 (δηλαδή

1ο+2ο+3ο+4ο+5ο=15). Η απάντηση αυτή θα μπορούσε πιθανώς να αιτιολογηθεί εξαιτίας της εμμονής στο «από τα τόσα παίρνω τόσα», χωρίς όμως να συνειδητοποιείται ότι το πρώτο «τόσα» (το όλο) είναι σύνολο που επιμερίζεται σε ίσα μέρη, και χωρίς να κατανοείται η ειδική σχέση που έχουν μεταξύ τους οι όροι του κλάσματος. Επίσης, φαίνεται δυσκολία στην αντίληψη και διαχείριση του κλάσματος ως «αναπαράστασης ποσότητας», κάτι που σχετίζεται με την αδυναμία του σχήματος «μέρος - όλο», το οποίο χρησιμοποιήθηκε από τους μαθητές ως ενδεικνυόμενο στην παραπάνω περίπτωση.

Η 3η ερώτηση είχε σκοπό να διερευνήσει την ικανότητα των μαθητών να διαμοιράσουν ένα σύνολο (διακριτή ποσότητα) σε ισοδύναμα υποσύνολα και να τα εκφράσουν με κλάσματα.

Πίνακας 3 (απαντήσεις μαθητών στην ερώτηση 3)

ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΑΝ ΣΩΣΤΑ		ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ		ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΚΑΘΟΛΟΥ	
f = 30	f % =15	f = 70	f % =35	f = 100	f % =50

Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 3, ποσοστό 35% των μαθητών απάντησαν λάθος, χωρίς να δίνεται η δυνατότητα ομαδοποίησης και κατηγοριοποίησης των απαντήσεων, και 50% των μαθητών δεν απάντησαν καθόλου. Είναι αξιοσημείωτο το μεγάλο ποσοστό των μαθητών που δεν απάντησαν καθόλου, σε συνδυασμό με τις επίσης λανθασμένες και χωρίς συγκεκριμένο σκεπτικό απαντήσεις. Επισημαίνεται και πάλι η μη αντίληψη της ανάγκης διαμερισμού ενός συνόλου σε ισοδύναμα υποσύνολα, για την συγκεκριμένη περίπτωση, αλλά και η αδυναμία έκφρασης των υποσυνόλων αυτών με κλάσματα.

Η 4η ερώτηση είχε στόχο να διερευνήσει και να καταγράψει το βαθμό κατά τον οποίο ο μαθητής αντιλαμβάνεται και διαχειρίζεται το κλάσμα ως «ποσότητα» (όχι υποχρεωτικά μικρότερη από την ακέραιη μονάδα), καθώς και τη δυνατότητα ενεργοποίησης του νοητικού σχήματος «μέτρηση».

Πίνακας 4 (απαντήσεις μαθητών στην ερώτηση 4)

ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ		ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	
f = 100	f % =50	f = 100	f % =50

Όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 4, ποσοστό 50% των μαθητών απάντησαν λάθος. Χωρίς τα είδη των απαντήσεων να δίνουν τη δυνατότητα να κατηγοριοποιηθούν ή να προκύπτει πιθανός τρόπος σκέψης που να εξηγεί τις λανθασμένες απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές, φαίνεται ότι δεν γίνεται ενεργοποίηση του νοητικού μοντέλου «μέτρηση», ώστε να γίνει αντιληπτό ότι το κλάσμα αντιπροσωπεύει μια «ποσότητα» και, κατ' επέκταση, ότι το κλάσμα μπορεί να αντιπροσωπεύει ποσότητα μικρότερη ή και μεγαλύτερη από την ακέραιη μονάδα. Επιπλέον, θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποδεικνύονται και πάλι οι αδυναμίες του νοητικού σχήματος «μέρος-όλο» να λειτουργήσει σε όλες τις περιπτώσεις της έννοιας του κλάσματος.

Η $5^{η}$ ερώτηση είχε στόχο να διερευνήσει αν οι μαθητές έχουν αναληφθεί ότι τα κλάσματα ως συμβολική έκφραση αντιπροσωπεύουν μια ειδική σχέση ανάμεσα στους δυο όρους τους, οι οποίοι όροι δεν υπόκεινται σε διαχείριση ως μεμονωμένοι φυσικοί αριθμοί.

Πίνακας 5 (απαντήσεις μαθητών στην ερώτηση 5)

ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ		ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ (πράξεις με ετερώνυμα)	
f = 40	f % =20	f = 160	f % =80

Αυτό δεν επιβεβαιώθηκε, καθώς, όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 5, ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών (80%) προσέθεσαν τα δύο ετερώνυμα κλάσματα δείχνοντας ότι τα αντιλαμβάνονται ως μια κατασκευή η οποία έχει ίδια χαρακτηριστικά, νόημα και τρόπο διαχείρισης με τους φυσικούς αριθμούς.

Η $6^{η}$ ερώτηση αποσκοπούσε στο να διερευνήσει το βαθμό κατανόησης από μέρους του μαθητή του ότι η ποσότητα που αντιπροσωπεύει να κλάσμα σχετίζεται με την πληθικότητα του «όλου» στο οποίο το κλάσμα αυτό αναφέρεται, καθώς και του νοητικού σχήματος «τελεστής».

Πίνακας 6 (απαντήσεις μαθητών στην ερώτηση 6)

ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ		ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ (ΟΤΙ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΔΥΝΑΤΟΝ ΓΙΑΤΙ...)				ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΚΑΘΟΛΟΥ	
f = 20	f % =10	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΟΤΙ ¼ ≠ 1/2		ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΟΤΙ ½ > ¼		f = 80	f % =40
		f = 60	f % =30	f = 40	f % =20		

Όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 6, αρκετά μεγάλο ποσοστό (40%) των μαθητών δεν απάντησαν καθόλου, ενώ 50% των μαθητών απάντησαν εσφαλμένα. Οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών μπορούν να ομαδοποιηθούν σε δύο κατηγορίες, σύμφωνα με το σκεπτικό τους: α) το 30% των μαθητών απάντησαν ότι δεν είναι δυνατόν τα δύο άτομα να έχουν ξοδέψει τα ίδια χρήματα, επειδή ½ ≠ ¼ , β) ποσοστό 20% των μαθητών απάντησαν ότι δεν είναι δυνατόν τα δυο άτομα να έχουν ξοδέψει τα ίδια χρήματα, γιατί ½ > ¼.

Από τις λανθασμένες απαντήσεις της πρώτης ομάδας διαπιστώνουμε ότι δεν είναι κατανοητό ότι η αξία (ποσότητα) που αντιπροσωπεύει το κλάσμα εξαρτάται και πάλι από την πληθικότητα του συνόλου στο οποίο αυτό αναφέρεται. Αντιθέτως, οι μαθητές θεωρούν ότι το κάθε κλάσμα μεμονωμένο αντιπροσωπεύει μια σταθερή ποσότητα (αφού από τα τόσα παίρνω τόσα), κάτι που θα συνέβαινε μόνο αν το κλάσμα αναφερόταν κάθε φορά στο ίδιο σύνολο ως «όλο». Από τις λανθασμένες απαντήσεις της δεύτερης ομάδας, με το σκεπτικό ότι δεν είναι δυνατό να ξόδεψαν τα ίδια χρήματα, επειδή > ½ , φαίνεται και αδυναμία κατανόησης της έννοιας της αξίας που αντιπροσωπεύει το κλάσμα ως μαθηματική κατασκευή στην περίπτωση που αυτά παρουσιάζονται μεμονωμένα (ανεξάρτητα από το «όλο» στο οποίο αναφέρονται). Και πάλι είναι εμφανής η αδυναμία αντίληψης ότι η αξία του σχετίζεται με την ειδική σχέση ανάμεσα στους όρους του και ότι οι αριθμοί του δεν αντιπροσωπεύουν ό,τι και οι φυσικοί αριθμοί. Φαίνεται να έχουμε μια υπεργενίκευση ήδη εδραιωμένων νοητικών σχημάτων, τα οποία αφορούν την αξία των φυσικών αριθμών. Δηλαδή, αφού 4>2, άρα και 1/4 >1/2 .

Η $7^{η}$ ερώτηση είχε στόχο να διερευνήσει τον βαθμό κατάκτησης της δεξιότητας μετατροπής μεικτού σε κλάσμα.

Πίνακας 7 (απαντήσεις μαθητών στην ερώτηση 7)

ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ		ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ (ΟΤΙ 5/5)		ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΚΑΘΟΛΟΥ	
f = 100	f % =50	f = 90	f % =45	f = 10	f % =5

Όπως παρατηρούμε στον πίνακα 7, το 45% των μαθητών που απάντησαν λάθος έδωσαν την ίδια απάντηση, δηλαδή ότι ο μεικτός ισούται με 5/5, προφανώς προσθέτοντας τον ακέραιο με τον αριθμητή του κλάσματος (3+2=5). Φαίνεται ότι δεν έχει κατακτηθεί η μηχανική δεξιότητα μετατροπής του μεικτού σε κλάσμα. Ακόμα, πιθανώς να δείχνει στρεβλή αντίληψη για τη σχέση ενός κλάσματος ως «ποσότητας» με την ακέραιη μονάδα. Εξάλλου, η παραπάνω στρεβλή αντίληψη είναι αυτή που εμποδίζει και την κατανόηση του καταχρηστικού κλάσματος, καθώς κυριαρχεί η αίσθηση ότι το κλάσμα είναι κάτι κατ' ανάγκη «μικρό» (και σίγουρα μικρότερο από το 1). Είναι, επίσης, προφανές ότι το κυρίαρχο νοητικό σχήμα «μέρος-όλο» δεν θα ήταν το ενδεικνυόμενο για τη διδασκαλία του καταχρηστικού κλάσματος.

Η $8^{η}$ ερώτηση διερευνούσε, σε σχέση και με την $5^{η}$, την κατανόηση του ρόλου της σχέσης των δυο όρων στον προσδιορισμό της αξίας του κλάσματος.

Πίνακας 8 (απαντήσεις μαθητών στην ερώτηση 8)

ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ		ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ			
f = 130	f % =65	ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ ΤΟ 8/24		ΑΛΛΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ	
		f =60	f % =30	f = 10	f % =5

Όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 8, από το 35% των μαθητών που έδωσαν λάθος απάντηση, το 30% απάντησαν ότι μεγαλύτερο κλάσμα είναι το 8/24. Προφανώς, οι μαθητές αυτοί συνέκριναν τα (ετερώνυμα) αυτά κλάσματα λαμβάνοντος υπόψη τους αποκλειστικά τον παρονομαστή (οι παρονομαστές ήταν 12, 24 και 4). Είναι εμφανής και επιβεβαιώνεται για μεγάλο ποσοστό μαθητών και πάλι η αντίληψη ότι η ποσότητα που αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα δεν εξαρτάται από την ειδική σχέση που έχουν μεταξύ τους οι όροι του. Σε άλλη σχετική έρευνα (Τσακαλίδης, 2008) διαπιστώθηκε η αδυναμία σύγκρισης ομώνυμων κλασμάτων από τους μαθητές, όπως επίσης και κλασμάτων με ίδιους αριθμητές και διαφορετικούς παρονομαστές, καθώς οι εσφαλμένες απαντήσεις ήταν σε ποσοστό 22,9% για τα αγόρια και 18,6% για τα κορίτσια.

Η 9^{η} ερώτηση είχε στόχο να διερευνήσει τις δυνατότητες των μαθητών να κατανοήσουν και να διαχειριστούν μια πιο σύνθετη προβληματική κατάσταση με κλάσματα.

Πίνακας 9 (απαντήσεις μαθητών στην ερώτηση 9)

ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ		ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ		ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΚΑΘΟΛΟΥ	
f = 40	f % =20	f = 60	f % =30	f = 100	f % =50

Όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 9, μεγάλο ποσοστό μαθητών (50%) δεν απάντησαν καθόλου, αδυνατώντας πιθανώς να ασχοληθούν, έστω και με οποιονδήποτε τρόπο, με τη συγκεκριμένη προβληματική κατάσταση. Επίσης, ένα μεγάλο ποσοστό έδωσαν αυθαίρετες εσφαλμένες απαντήσεις χωρίς να εξηγούν και χωρίς να προκύπτουν συγκεκριμένοι τρόποι σκέψης από τους οποίους οδηγήθηκαν στις απαντήσεις αυτές. Φαίνεται δυσχέρεια των μαθητών να εκφράσουν (και στη συνέχεια να διαχειριστούν) με κλάσματα τα δεδομένα μιας προβληματικής κατάστασης. Το ζήτημα αυτό είναι αρκετά σύνθετο και δεν σχετίζεται μόνο με την ανάγκη βαθιάς κατανόησης της έννοιας, αλλά και με την άσκηση του μαθητή να μετατρέπει τη λεκτική μορφή των δεδομένων ενός προβλήματος σε συμβολική.

Συμπεράσματα - Προτάσεις

Από την επισκόπηση και το σχολιασμό των αποτελεσμάτων της παρούσας περιγραφικής έρευνας προκύπτουν ομαδοποιημένοι οι παρακάτω παράγοντες όσον αφορά την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος από τους μαθητές:

- Ο χωρισμός του «όλου» δεν γίνεται σε ίσα μέρη.
- Τα μέρη του «όλου» συνήθως εκλαμβάνονται από τους μαθητές ως κομμάτια ενός αντικειμένου και αποφεύγεται η θεώρησή τους ως ισοδύναμων υποσυνόλων ενός συνόλου (διακριτό «όλο»).
- Υπάρχει δυσκολία από τον μαθητή στην αντίληψη της αξίας (ποσότητας) που αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα (κλάσμα ως ποσότητα).
- Εκδηλώνεται δυσχέρεια από τον μαθητή στο χειρισμό προβλήματος πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων, καθώς και στη δεξιότητα μετατροπής μεικτού σε κλάσμα. Επίσης, οι μαθητές αντιλαμβάνονται και διαχειρίζονται το κλάσμα ως φυσικό αριθμό.
- Σε σχέση και με τα προηγούμενα, οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι η αξία (ως ποσότητα που αντιπροσωπεύει) ενός κλάσματος εξαρτάται από τη

σχέση αριθμητή και παρονομαστή και από την (αρχική) ποσότητα στην οποία αυτό το κλάσμα (ως σχέση) αναφέρεται.

Στη συνέχεια, συνοψίζοντας τα ευρήματα και τα σχόλια πιθανολογούμε ενδεχόμενες αιτίες και γίνεται απόπειρα διατύπωσης κάποιων προτάσεων σχετικά με αυτά.

Γενικότερα, φαίνεται ότι η σκέψη του μαθητή καθοδηγείται από την πρωταρχική παρανόηση ότι το κλάσμα είναι μόνο μια κατ' ανάγκη μικρή ποσότητα και μόνο ένα κομμάτι ενός πράγματος.

Στα παλαιότερα εγχειρίδια και ενδεχομένως και στις σημερινές διδακτικές πρακτικές το κλάσμα παρουσιάζεται ως «υποπεριοχή», κάτι το οποίο θέτει σοβαρά εμπόδια στο χειρισμό του κλάσματος από τους μαθητές ως σημείου της αριθμογραμμής, ως αποτέλεσμα διαίρεσης, ως τρόπου σύγκρισης μεγεθών ή μετρήσεων (Τζεκάκη, 2000). Ακόμα, οι μαθητές, προσπαθώντας να δώσουν νόημα και να κατανοήσουν τα κλάσματα ως συμβολικές παραστάσεις, πιθανώς υπεργενικεύουν την εδραιωμένη γνώση που έχουν για τους ακεραίους και χρησιμοποιούν τους ίδιους «νόμους» και για το χειρισμό των κλασμάτων.

Πιθανολογώντας το παραπάνω, θα μπορούσαμε εύλογα να το συσχετίσουμε με το γεγονός ότι και η προηγούμενη διδακτική «εμπειρία»/«πρακτική» των διδασκόντων μπορεί να λειτουργήσει ως ανασταλτικός παράγοντας, οδηγώντας τους σε διδακτικές συμπεριφορές οι οποίες είναι έξω από το πλαίσιο των κατάλληλων δραστηριοτήτων και του συνεπαγόμενου διδακτικού τρόπου ο οποίος απαιτείται για την έννοια αυτή (www.kee.gr). Έτσι, για παράδειγμα, οι εκπαιδευτικοί, ξέροντας ότι οι μαθητές έχουν κατακτήσει και αποκτήσει ευχέρεια στο χειρισμό και στις πράξεις των ακεραίων από τα προηγούμενα χρόνια, ενδεχομένως δεν συνειδητοποιούν ότι τα κλάσματα είναι μια καινούργια, άγνωστη και μη φυσική για τον μαθητή έννοια, η οποία απαιτεί πολύ χρόνο για τη βαθιά κατανόησή της. Μάλιστα, το ότι τα κλάσματα εισάγονται σχετικά αργά στη σχολική ύλη ίσως κάνει ακόμα δυσχερέστερη την κατανόησή τους, καθώς έχουν ήδη εδραιωθεί στους μαθητές τα γνωστικά σχήματα που έχουν για τους φυσικούς αριθμούς, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούν αυτά τα ήδη εδραιωμένα σχήματα και για το χειρισμό των κλασμάτων (Κορνηλάκη, 2000).

Επιπλέον, είναι παρατηρημένο από τη σχολική εμπειρία και πρακτική ότι στη διδασκαλία των μαθηματικών οι εκπαιδευτικοί προτιμούν τη «συμβολική» προσέγγιση των κλασμάτων και των σχέσεών τους από την «οπτική» (εποπτική, αναπαραστασιακή) προσέγγιση των σχέσεων αυτών. Έτσι, οι μαθητές κατανοούν ότι $1/5 > 1/10$ όταν κάνουν βιωματική (εποπτική) αναπαράσταση της σχέσης αυτής, ενώ όταν έρχονται αντιμέτωποι με τη συμβολική αναπαράσταση της σχέσης αυτής τότε θεωρούν ότι $1/5 < 1/10$, επηρεασμένοι από τους φυσικούς αριθμούς, καθώς είναι πολύ δύσκολο να συνδέσουν την οπτική (ποιοτική) αντίληψη μιας έννοιας με τη συμβολική της (Μπουρίκα, 2002).

Με βάση τα συμπεράσματα που προέκυψαν και τα σχόλια για τις πιθανές αιτίες των λαθών των μαθητών, θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε τη σκοπιμότητα τού να εισάγεται η ύλη των κλασμάτων νωρίτερα, ώστε να μην υπεργενικεύονται τα εδραιωμένα νοητικά σχήματα των φυσικών αριθμών.

Ακόμα, είναι πολύ σημαντικό να δοθεί έμφαση όχι στη διδασκαλία στερεότυπων αλγοριθμικών δραστηριοτήτων, αλλά να προτάσσεται επίμονα η ποιοτική (οπτική) αναπαράσταση των κλασμάτων και των σχέσεών τους και όχι η συμβολική, όσον αφορά την κατανόηση της έννοιας και των πράξεων μεταξύ κλασμάτων. Το παραπάνω, σε συνδυασμό με τη μη μηχανική προσέγγιση και τη μη αποσπασματική απομόνωση ορισμών και ιδιοτήτων των κλασμάτων, αλλά με την εμφατική καθοδήγηση του μαθητή να ανακαλύψει επαγωγικά τους νόμους που διέπουν τα κλάσματα, θα βοηθήσει στην ουσιαστική κατανόησή τους και στην αποβολή συνηθειών οι οποίες απορρέουν από την τάση των μαθητών να αποδίδουν την ίδια αξία στον ίδιο αριθμό. Έτσι, για παράδειγμα, θα συνειδητοποιήσουν ότι το 1 – αριθμητής του 1/10 αντιπροσωπεύει κάτι μικρότερο από το 1 – αριθμητή του 1/5 (Μπουρίκα, 2002).

Τέλος, φαίνεται η αδυναμία του κάθε νοητικού σχήματος-μοντέλου μεμονωμένα να καλύψει όλες τις περιπτώσεις που εμπίπτουν στην έννοια του κλάσματος, αλλά πιθανόν και να υπερέχουν στη διδακτική πρακτική κάποια νοητικά σχήματα εις βάρος κάποιων άλλων. Επιπλέον, κατά τη διδασκαλία του νοητικού σχήματος «μέρος-όλο» είναι εύλογο, για λόγους απλότητας και διευκόλυνσης, η επιλογή του «όλου» να αφορά συνεχή ποσότητα, καθώς από τις πρώτες φορές που εισάγεται η έννοια του κλάσματος είναι συνηθισμένη πρακτική να επιμερίζουμε ως όλο ένα μήλο, μία σοκολάτα, μία σελίδα (συνεχή ποσότητα).

Βέβαια, όλα τα νοητικά σχήματα, αν και το καθένα είναι για διαφορετικές περιπτώσεις, συνδέονται μεταξύ τους με τρία κοινά στοιχεία: α) την έννοια της διαμέρισης, β) την έννοια της μονάδας, και γ) την έννοια της ποσότητας. Συγκεκριμένα, η έννοια της διαμέρισης είναι πολύ σημαντική για τη συγκρότηση της έννοιας των ρητών αριθμών, τόσο σημαντική, όσο και η απαρίθμηση για τους φυσικούς αριθμούς. Η έννοια της «μονάδας» μεταβάλλεται ανάλογα με το σχήμα του ρητού στο οποίο βρισκόμαστε. Ο χειρισμός της έννοιας αυτής είναι επίσης καθοριστικός για την κατανόηση των ρητών. Τέλος, η έννοια της «ποσότητας» μπορεί να βοηθήσει καθοριστικά στην κατανόηση της έννοιας του ρητού, καθώς και οι ρητοί, όπως και οι φυσικοί αριθμοί, αναπαριστούν ποσότητες. Πολλές από τις εσφαλμένες αντιλήψεις και τα λάθη των μαθητών οφείλονται στην αδυναμία τους να δουν τους ρητούς ως αναπαραστάσεις ποσοτήτων.

Τέλος, θα μπορούσαμε να πούμε ότι κρίνουμε σκόπιμο να προτείνουμε τα βιβλία και τα αναλυτικά προγράμματα να προβλέπουν επαρκή χρόνο για την αφομοίωση των εννοιών από τους μαθητές, ειδικότερα όταν αυτές απαιτούν αυξημένη συνδυαστική σκέψη, με συνδυασμό νοητικών σχημάτων, σε συνδυασμό με την κατάλληλη διδακτική στήριξη, ώστε να μην αποθαρρύνονται οι μαθητές. Επιπλέον, να υπάρχει επαρκής αριθμός εμπεδωτικών ασκήσεων, ώστε αυτό να μην επαφίεται στην προσπάθεια κάλυψής του από τον δάσκαλο με δικά του φύλλα εργασίας. Ακόμα, τα βιβλία πρέπει να δίνουν στον μαθητή ευκαιρίες για εποπτική διδασκαλία με προσέγγιση των φαινομένων της καθημερινότητας του μαθητή, τα οποία οπτικοποιούν κλασματικές έννοιες και σχέσεις (Τσακαλίδης, 2006).

Κλείνοντας θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι η διαπίστωση των προβλημάτων τα οποία προκύπτουν από την έρευνα σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών για τα κλάσματα αποκτά χρησιμότητα μόνο αν, και κατά τον σχεδιασμό της αλλά και κατά την επισήμανση και ερμηνεία των συμπερασμάτων της, ανατροφοδοτείται από τις εμπειρίες των εκπαιδευτικών

Μάλιστα, ο ειδικός ερευνητής της μαθηματικής εκπαίδευσης πρέπει να βλέπει τα σχολικά μαθηματικά ως μια επέκταση των προμαθηματικών δραστηριοτήτων του ανθρώπου που αναπτύσσεται μέσα στο ευρύτερο κοινωνικό φαινόμενο. Επίσης, ο δάσκαλος πρέπει σαφώς όχι να σχεδιάζει τα προγράμματα και τις τεχνικές διδασκαλίας των μαθηματικών, αλλά να μπορεί να διεξάγει ένα είδος «τοπικής έρευνας» και να αξιοποιεί τα συμπεράσματά της για τη βελτίωση της διδασκαλίας του (Βόσκογλου, 2003). Έτσι, είναι σημαντικό να ανιχνεύει τις ενδεχόμενες πρότερες και διαστρεβλωμένες αντιλήψεις των μαθητών για τα κλάσματα και να σχεδιάζει μετά τη διδασκαλία του. Σημαντικό είναι να αποδελτιώνονται τα είδη των λαθών και να γίνεται προσπάθεια να ερμηνευτεί ο τρόπος σκέψης των μαθητών, ώστε να διαπιστωθεί ποιες ακριβώς και γιατί είναι οι διαστρεβλωμένες αντιλήψεις.

Σε σχέση με τα παραπάνω, ο δάσκαλος δεν πρέπει να είναι απλώς αποδέκτης των συμπερασμάτων τής κάθε έρευνας που αφορά τη διδακτική των μαθηματικών, αλλά συνεργάτης του ερευνητή, και να προβαίνει σε ανάλυση των αποτελεσμάτων εκφράζοντας την άποψή του πάνω στις ερμηνείες (Βόσκογλου, 2003).

Περιορισμοί της έρευνας

Πρέπει να επισημάνουμε ότι τα συμπεράσματα της έρευνας δεν υποστηρίζεται ότι έχουν εφαρμογή και ότι μπορούν να γενικευτούν στο γενικό πληθυσμό των μαθητών Στ′ τάξης, καθώς το δείγμα δεν είχε κατάλληλο μέγεθος και αντιπροσωπευτικότητα, ενώ ο τρόπος επιλογής του δεν ήταν τυχαίος, αλλά συμπτωματικός. Επίσης, πέρα από την καταγραφή και το σχολιασμό των ευρημάτων, οι πιθανές αιτίες τους δεν είναι δυνατόν να τεκμηριωθούν πλήρως βιβλιογραφικά και από άλλες έρευνες, αλλά εμπεριέχουν και υποθετικές απόψεις. Παρά τους παραπάνω περιορισμούς, θεωρούμε τα συμπέρασμα της έρευνας χρήσιμα και ουσιαστικά ως προς τη συμβολή τους και στο γενικότερο προβληματισμό αλλά και σε άλλες ερευνητικές προσπάθειες σχετικά με το ζήτημα αυτό.

Βιβλιογραφία

Βόσκογλου, Μ. (2003). Διδακτική των μαθηματικών. Μια απόπειρα οριοθέτησης- τάσεις και προοπτικές. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων. 8, 20-30*

Δαφέρμος, Β. (1999). Η μετάβαση των μαθητών από το σύστημα των φυσικών στο σύστημα των θετικών ρητών. *Ευκλείδης Γ′, Επιθεώρηση Μαθηματικής Εκπαίδευσης,* Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, τόμ. 16, τεύχ. 51, σελ. 61-83.

Δαφέρμος, Β. (1998). Εναλλακτικές μορφές του ρητού αριθμού, ανάπτυξη, αιτιολόγηση και λειτουργία αυτών ως αυτόνομων διδακτικών μοντέλων. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, τεύχ. 3, σελ. 3-43.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών.* Αθήνα, Leader Books.

Κορνηλάκη, Αι. (2000). Η κατανόηση των κλασματικών σχέσεων στο πλαίσιο του μερισμού συνεχών ποσοτήτων. *Παιδαγωγικός Λόγος,* 1, 100-109.

Μπούρικα, Μ. - Πέτρου, Α. - Χάλκου, Μ. (2002). Προβληματισμοί και προτάσεις σχετικά με τις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας των κλασμάτων. Επίδραση των «πιστεύω» του διδάσκοντα. *Παιδαγωγικός Λόγος,* 1, 95-107.

Μπούφη, Α. (1998). *Παραδόσεις μαθήματος: «Πρακτικές ασκήσεις στα Μαθηματικά»*. Πανεπιστήμιο Αθηνών, Π.Τ.Δ.Ε., Μαράσλειο Διδασκαλείο.

Τζεκάκη, Μ. - Δεληγιωργάκος, Ι. (Eds) (2000). *Έρευνα για τις εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών.* Αθήνα.: ΥΠΕΠΘ – ΚΕΕ.

Τσακαλίδης, Α. (2006). Η κατανόηση των εννοιών του κλάσματος και του δεκαδικού αριθμού στο Δημοτικό Σχολείο. *Παιδαγωγικό Βήμα του Αιγαίου,* 61, 29- 57.

ΥΠ.Ε.Π.Θ. - Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2002). *ΔΕΠΠΣ και ΑΠΣ Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης*, τόμοι Α′ και Β′.

ΥΠ.Ε.Π.Θ. - Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2005α). *Μαθηματικά Στ′ Δημοτικού, Βιβλίο μαθητή.*

ΥΠ.Ε.Π.Θ. - Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2005β). *Μαθηματικά Στ′Δημοτικού, Βιβλίο δασκάλου*. ΟΕΔΒ.

ΥΠ.Ε.Π.Θ. - Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2005γ). *Μαθηματικά Στ′ Δημοτικού, Τετράδιο εργασιών.* ΟΕΔΒ.

Φιλίππου, Γ. (1991). Οι μαθηματικές γνώσεις των αποφοίτων του Δημοτικού Σχολείου και οι εκτιμήσεις των δασκάλων τους. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τ. 58, σελ. 33-37.

Κλάσματα, δεκαδικοί και ποσοστά. Διαθέσιμο: http://www. Eled.uowm. gr/mathslife. Ανάκτηση: 10-2-2009.

www.kee.gr (2008). *Εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Διαθέσιμο: www. Kee.gr. Ανάκτηση: 15-2-2009.