

## «Μαθηματικά, μια απ' τις μείζονες δυνάμεις που γέννησαν το σύγχρονο κόσμο...»

### Δεύτερο μέρος\*

Γεώργιος Δ. Καρατάσιος  
*Μαθηματικός – Δρ. Πολυτεχνικής Σχολής Α.Π.Θ.,  
Περιφερειακός Διευθυντής Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης  
Κεντρικής Μακεδονίας*

Ελένη Δαλακίου  
*Εκπαιδευτικός*

### 3. Η θεωρία του Χάους

Στους αρχαίους μύθους το Χάος αποτελεί το βασικό στοιχείο στη δημιουργία του Σύμπαντος. Θεωρητικά, το μέλλον καθορίζεται πλήρως από το παρελθόν, αλλά στην πράξη υπάρχουν μικρές αβεβαιότητες, όπως είναι τα πολύ μικρά σφάλματα μετρήσεων, που, όταν υπαισέρχονται σε υπολογισμούς, γίνονται στη συνέχεια ολοένα και μεγαλύτερα, με αποτέλεσμα, αν και η συμπεριφορά τού υπό μελέτη φαινομένου βραχυπρόθεσμα είναι προβλέψιμη, δηλαδή αιτιοκρατική, να γίνεται μακροπρόθεσμα μη προβλέψιμη, δηλαδή χαώδης. Σκοπός της ερευνητικής περιοχής του Χάους είναι γενικά η προσπάθεια εξήγησης της πορείας μετάβασης από την Τάξη προς αυτό και αντίστροφα. Η έννοια του Χάους συνδέεται άμεσα με την έννοια της προβλεπτικότητας: από παρόμοιες αρχικές υποθέσεις μπορούν να προκύψουν πολύ διαφορετικά συμπεράσματα. Αυτό, όπως αναφέρουμε στην εισαγωγή (βλ. προηγούμενο τεύχος), είχε διαβλέψει ο Ανρί Πουανκαρέ, καθώς αναλύοντας μια μερική λύση κατέληξε σε μια εξαιρετικά περίπλοκη δομή, πως η πρώτη βασική έννοια της πολυπλοκότητας στο χρόνο, που ονομάζεται χαοτική δυναμική, αφορά τη μεγάλη ευαισθησία φυσικών φαινομένων στις αρχικές τους συνθήκες, δηλαδή το ότι μικρές αλλαγές στα αίτια μπορεί να οδηγήσουν σε μεγάλες αλλαγές στα αποτελέσματα.

Κάθε φορά που συμβαίνουν αλληλεπιδράσεις, επαναλήψεις ή αναδράσεις, η απλότητα και η πολυπλοκότητα εναλλάσσονται σε αυτό που ορίζεται ως “δια-

\* Το πρώτο μέρος αυτής της εργασίας δημοσιεύθηκε στο προηγούμενο τεύχος του περιοδικού.

λειπτότητα”, που σημαίνει εκρήξεις Χάους σε μια κανονική τάξη αλλά και εμφάνιση απλής τάξης στην καρδιά του Χάους. Η χαοτική τυχαία κίνηση των μορίων νερού που βράζει σε κάποιο κρίσιμο σημείο συνδυάζεται και σχηματίζεται σχήμα κανονικών εξαγωνικών δινών! (η αρρητότητα είναι ένα είδος διαλειπτότητας στην κανονική ευθεία των αριθμών...). Η χαοτική ολότητα είναι γεμάτη από στοιχεία ενεργά και αλληλεπιδρώντα, ζωντανεμένα από μη-γραμμικές αναδράσεις και ικανά να παράγουν τα πάντα, από τα αυτο-οργανωμένα συστήματα ως τη φράκταλ αυτο-ομοιότητα και τη μη προβλέψιμη χαοτική αταξία. Είναι τα φαινόμενα εκείνα που απορρίπτονται ως “τυχαία” και “ακατάστατα” από το μηχανιστικό σύστημα.

Παρατηρώντας τη συμπεριφορά του ανθρώπου από τότε που μπορούμε να τη μελετήσουμε αντιλαμβανόμαστε πως οι έννοιες του Χάους και της τάξης, του προβλέψιμου και του απρόβλεπτου, του καθοριστικού και του τυχαίου έπαιξαν σημαντικό ρόλο στον τρόπο με τον οποίο ο άνθρωπος αντιλαμβανόταν τη φύση γύρω του. Η αριστοτέλεια λογική επηρέασε για πολλούς αιώνες την ευρωπαϊκή διάνοηση και μετά την εντυπωσιακή πρόοδο των επιστημών η αιτιοκρατική ερμηνεία του σύμπαντος (17-18 αι.) φάνταζε ακλόνητη, ωστόσο οι νεότερες (19<sup>ος</sup>-20<sup>ος</sup> αι.) ανακαλύψεις που έγιναν εξαιτίας των εκκρεμοτήτων: της ακανόνιστης τροχιάς του Ερμή, της ασυμφωνίας ανάμεσα στη θεωρία και στην ποσότητα της θερμότητας που εκπεμπούταν από ένα σκοτεινό αντικείμενο, και της επίδρασης ενός τρίτου σώματος στην κίνηση δυο άλλων, οδήγησαν, κατά σειρά, η πρώτη στη θεωρία της σχετικότητας, η δεύτερη στην κβαντική θεωρία και η τρίτη στη θεωρία του Χάους και της πολυπλοκότητας – καιρία πλήγματα στη μέχρι τότε κυριαρχία του ντετερμινισμού (αιτιοκρατικής αντίληψης του σύμπαντος).

Τώρα πια, έχοντας και τη θεωρία του Χάους, εξοπλιστήκαμε με νέα εφόδια θεωρίας και πρακτικής. Η θεωρία του Χάους δέχεται ότι ο κόσμος είναι χαοτικός και ασυνεχής μόνον όσον αφορά την επιφανειακή του μορφή, γιατί πίσω από την αρχικά αντιλαμβανόμενη αυτή αταξία κρύβεται μια τάξη απόλυτα κανονική και με άπειρη πολυπλοκότητα. Αυτό συμβαίνει εξ ορισμού στο φυσικό περιβάλλον, αλλά τείνει να συμβαίνει και στον κόσμο που ο άνθρωπος κατασκευάζει. Αυτή η τάξη συνεχίζεται σε άπειρα επίπεδα ανάλυσης του κόσμου.

Ίσως η πιο σημαντική συμβολή της θεωρίας του Χάους είναι η συνειδητοποίηση ότι, όσο βαθύτερα κατανοούμε τη φύση και τη ζωή, τόσο θα συναντούμε εκπλήξεις και απρόοπτα μαζί με νέες προκλήσεις κι ερωτήματα, που πρέπει να αντιμετωπίζουμε συνεχώς σε μια συναρπαστική αλληλουχία χωρίς τέλος....

Υπάρχει ένας σημαντικός δεσμός μεταξύ της θεωρίας του Χάους και της φράκταλ γεωμετρίας: η μεταστροφή από την ποσότητα στην ποιότητα. Όπως έχει αποδειχτεί, είναι αδύνατο να προβλεφτούν οι τιμές των μεταβλητών ενός χαοτικού συστήματος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, αλλά η πρόβλεψη των ποιοτικών χαρακτηριστικών αυτού του συστήματος είναι εφικτή. Είναι αδύνατο να υπολογίσουμε το μήκος ή το εμβαδόν ενός φράκταλ σχήματος, μα μπορούμε να ορίσουμε το βαθμό της «οδόντωσης» με ποιοτικό τρόπο. Όπου διαπιστώνονται Χάος, αταξία, στροβιλισμός, βρίσκεται εν δράσει η φράκταλ γεωμετρία. Αυτό,

όμως, οδηγεί στο εκπληκτικό συμπέρασμα πως το χάος και ο στροβιλισμός πρέπει να δημιουργούνται από τις ίδιες, υποκειμενικές διαδικασίες που δημιουργούν βουνά, σύννεφα, ακτές ή τις οργανικές μορφές της Φύσης: αιμοφόρα αγγεία, νευρικά συστήματα, πνεύμονες κ.λπ. Οι ερευνητές χρησιμοποιούν τα φράκταλ για να προσομοιώσουν τη διαταραχή που δημιουργεί στον αέρα ένα υπερηχητικό αεροπλάνο ή τα δίκτυα των νεύρων του ανθρώπινου σώματος. Αυτά τα μαθηματικά φράκταλ παρουσιάζουν υπερβολικά μεγάλη “κανονικότητα” και, αν επιτραπεί στις διαδικασίες παραγωγής φράκταλ κάποια τυχαία διαφοροποίηση, όταν, δηλαδή, εισάγουμε τον παράγοντα “τύχη”, τότε προκύπτει πολύ καλύτερη απομίμηση των πραγματικών μορφών της φύσης.

Η λέξη χάος μπορεί εύκολα να παρερμηνευτεί, καθώς στην καθημερινή γλώσσα είναι συχνά συνώνυμη με την αταξία. Όμως η θεωρία του Χάους είναι απόλυτα αιτιοκρατική: το σύνολο Μάντελμπροτ θα είναι πάντα το ίδιο και οποιαδήποτε αρχική τιμή  $Z$  πάντα θα οδηγεί στην ίδια επαναληπτική ακολουθία. Η διαφορά ανάμεσα σε ένα χαοτικό σύστημα και σε ένα τυχαίο είναι ότι η τυχειότητα δεν έχει δομή. Το χάος, αντίθετα, είναι δομημένο, αν και με πολύπλοκο και φευγαλέο τρόπο. Είναι δύσκολο να προβλεφτούν τα χαοτικά συστήματα. Αν και η επαναληπτική μέθοδος είναι αιτιοκρατική, είναι πολύ ευαίσθητη στις αρχικές τιμές, οπότε, όταν χρησιμοποιείται για την προσομοίωση πραγματικών συστημάτων, τα τυχόν σφάλματα των αρχικών μετρήσεων μεγεθύνονται. Το γεγονός ότι πολλά από τα φυσικά δυναμικά συστήματα συμπεριφέρονται χαοτικά παραμένει ένα από τα μυστήρια του σύμπαντος στο οποίο ζούμε.

Η θεωρία του Χάους μπορεί να φαίνεται ότι παρουσιάζει το σύμπαν σαν ένα μάλλον ασταθές μέρος, όμως το σύμπαν είναι γεμάτο στέρεες κατασκευές, από τους μετρονομικούς παλμούς των Πάλσαρς μέχρι τις έξοχες σπείρες ενός μορίου D.N.A. Η μελέτη του πώς προκύπτουν τέτοιες σταθερές δομές είναι το αντικείμενο της αποκαλούμενης θεωρίας της πολυπλοκότητας. Η μελέτη των πολύπλοκων συστημάτων καλύπτει τώρα πολλούς τομείς, όπως τη θεωρία του Χάους, την τεχνητή νοημοσύνη, τα αναδυόμενα συστήματα και τα αυτόματα. Ο άνθρωπος-κλειδί που συνένωσε όλους αυτούς τους τομείς ήταν ο Τζώρτζ Α. Κάουαν (Ινστιτούτο Σάντα Φε). Το 1990 το Ινστιτούτο της Σάντα Φε είχε γίνει παγκόσμιο κέντρο έρευνας για τα πολύπλοκα συστήματα.

Ο Benoit Mandelbrot θεωρεί ότι (καθώς το μεγάλο ενδιαφέρον που υπάρχει για τη γεωμετρία των φράκταλ είναι κάτι ιδιαίτερα θετικό) ο μεγάλος ενθουσιασμός που δείχνουν μελετητές διάφορων επιστημονικών πεδίων για τα φράκταλ και τη θεωρία του Χάους είναι ένα ελπιδοφόρο μήνυμα ότι τα μαθηματικά βγαίνουν από την απομόνωση! Οι μαθηματικοί της πολυπλοκότητας κάνουν όλο και περισσότερο κόσμο να συνειδητοποιεί ότι τα μαθηματικά είναι κλειδί για την κατανόηση αυτού του κόσμου που μας περιβάλλει.

Τελικά, ο μύθος της απόλυτης προβλεπτικότητας, η οποία μέχρι χθες θεωρούνταν αχώριστος σύντροφος της αιτιοκρατίας, έχει καταρριφθεί. Σήμερα πιστεύουμε ότι οι έννοιες “απόλυτη αιτιοκρατία” και “τυχαία μεταβολή” όχι μόνο δεν αποκλείουν η μια την άλλη, αλλά μπορούν να συνυπάρχουν και πως η συ-

νύπαρξη αυτή αποτελεί νόμο της φύσης! Ο επιστημονικός όρος *χάος* αναφέρεται σε μια αλληλεξάρτηση που ενυπάρχει σε φαινομενικά τυχαία γεγονότα. Μπορούμε να πούμε πως επικεντρώνεται σε κρυμμένα σχήματα, αποχρώσεις, “αισθαντικότητα” των πραγμάτων. Στους “κανόνες” για το πώς το μη προβλέψιμο οδηγεί στο νέο.

Με την εφαρμογή της έννοιας αυτής στη ζωή, μεταλλάσσεται από μια επιστημονική θεωρία σε μια νέα πολιτιστική μεταφορά προσφέροντάς μας προβληματισμούς για την τρομερή πεποίθησή μας πάνω στον απόλυτο έλεγχο της ζωής και την κατάφωρη ανάγκη μας να κατακτηθεί ο έλεγχος αυτός με όλο και περισσότερα μέσα. Επίσης, μας δείχνει πως αντί να αντιστεκόμαστε στις αβεβαιότητες της ζωής πρέπει να τις αγκαλιάζουμε, να αντιδρούμε δυναμικά, δημιουργικά και, τέλος, να μπορούμε να διακρίνουμε τη λεπτή, μη δυνάμενη να κατηγοριοποιηθεί, εσώτερη φύση της ανθρώπινης κατάστασης, γιατί πέρα και ανάμεσα στις προσπάθειές μας για έλεγχο υπάρχει ο πλούσιος, απέραντος κόσμος των λεπτών αποχρώσεων και της ασάφειας, όπου εντέλει βιώνεται η αληθινή ζωή.

Σε κρίσιμα σημεία της ισορροπίας των συστημάτων, η ενίσχυση μιας ανάδρασης μπορεί και να προκαλεί το ξεπήδημα του απρόβλεπτου και να γεννά μια νέα πραγματικότητα. Η δύναμη της πεταλούδας (από τη γνωστή ρήση του Λόρεντζ για το αν το φτερούγισμα μιας πεταλούδας στη Βραζιλία μπορεί να προκαλέσει τυφώνα στο Τέξας) είναι η δύναμη του “ασήμαντου”, του μικρού, που στα κλειστά συστήματα μελέτης δε θα την πάρουμε υπόψη, αλλά τότε ίσως μας διαφεύσει! Είναι η δύναμη των ανοικτών συστημάτων, που υπό κάποιες συνθήκες-αναδράσεις μπορούν να αναδείξουν το μικρό ως καθοριστή των εξελίξεων.

Μετά τον Λόρεντζ και άλλοι επιστήμονες άρχισαν να αναγνωρίζουν μη γραμμικά φαινόμενα πεταλούδας σε σύνθετα συστήματα παντού γύρω τους. Οι άνθρωποι μπορεί να εξακολουθούν να ονειρεύονται τη δύναμη της πρόβλεψης και του ελέγχου, η θεωρία του Χάου, όμως, μας λέει ότι τα περισσότερα αυτο-οργανωμένα συστήματα συνδέονται με αμέτρητες πεταλούδες πολλών σύνθετων ποικιλιών και χρωμάτων. Η κοινωνική μας ζωή είναι γεμάτη από πολλά παραδείγματα τέτοιων φαινομένων, με αρνητική ή θετική δράση. Εδώ έγκειται η πραγματική επιρροή κάθε ατόμου. Η σύνθετη επίδρασή μας, καλή ή κακή, έχει σχέση με αυτό που είναι ο καθένας μας. Μπορούμε με ανεπαίσθητες επιδράσεις να επιδράσουμε αποφασιστικά, όπως η πεταλούδα του Λόρεντζ. Η δύναμη της πεταλούδας υπογραμμίζει πόσο βαθιά μπορούν τα άτομα να επηρεάσουν την κοινότητα, πως ποτέ δεν ξέρουμε πόσο σημαντική θα αποδειχθεί η συνεισφορά μας.

Συνολικότερα, στη φύση οι επιστήμονες του Χάους με τη δική τους οπτική γωνία ανακάλυψαν ότι η φύση δεν είναι αρένα αποκλειστικά αγώνα για δύναμη και επικράτηση, γιατί ανέδειξαν τον όρο συνεξέλιξη και την έννοια πολύπλοκων συστημάτων αλληλεξάρτησης και συνεργασίας με κλασικό εκπρόσωπο το τροπικό δάσος. Ο “ελκυστής” στη θεωρία του Χάους είναι η τάση ενός χαοτικού συλλογικού συστήματος να επαναλαμβάνει τις συμπεριφορές του. Μελετώντας παραδείγματα από τη ζωντανή φύση, ονόμασαν τον ελκυστή “παράξενο”, γιατί

δεν επαναλάμβανε πιστά τη λειτουργία του συστήματος, αλλά, όντας ανοιχτός σε αναδράσεις από το περιβάλλον, “μετακινούσε” το μοντέλο συμπεριφοράς. Όπως ο καρδιακός μυς πρέπει να δουλεύει, για να καταδειχτεί ότι μια καρδιά, για να είναι υγιής, δεν πρέπει να έχει μια άκαμπτη σταθερότητα λειτουργίας, απεναντίας, πρέπει τη σταθερότητά της να την προσαρμόζει στις διάφορες καταστάσεις της ζωής.

#### 4. Η οξυδέρκεια του ελληνικού πνεύματος

Αιγύπτιοι, Βαβυλώνιοι και Κινέζοι είχαν αναπτύξει τα μαθηματικά πολλά χρόνια πριν από τους Έλληνες. Γιατί τελικά έμειναν οι Έλληνες στην ιστορία; Όλοι οι μεγάλοι λαοί της Ανατολής, με τους οποίους οι Έλληνες είχαν επαφές, παρά τις θυμαστές και μεγάλες επιδόσεις τους σε ορισμένους, πρακτικούς μόνο, τομείς της γνώσης, δε κατάφεραν να κάνουν αυτή την υπέρβαση των αρχαίων Ελλήνων διανοουμένων και να οδηγηθούν σε νόμους, γενικεύσεις και αφαιρέσεις. Σήμερα, καθώς πραγματοποιούνται πολυάριθμες μελέτες γύρω από τα αιγυπτιακά και βαβυλωνιακά μαθηματικά, αναγνωρίζουμε όλο και περισσότερο την προσφορά τους στα ελληνικά μαθηματικά. Η ιστορία της Δύσης, όμως, όπως είναι γνωστό, μετά την αρχαιότητα, ακολούθησε τα ίχνη της ελληνικής, της ελληνιστικής και κατόπιν της λατινικής κουλτούρας. Ο ελληνικός τρόπος μελέτης των μαθηματικών ήταν που διαδόθηκε στον κόσμο: η υπέρβαση της αριθμητικής “απόδειξης”: η αλήθεια αποδεικνύεται μέσω της τεκμηρίωσης. Είναι αξιοθαύμαστη αυτή η οξυδέρκεια του ελληνικού πνεύματος και η προσπάθειά του να οικοδομήσει τον ορθό λόγο και να διατυπώσει με σαφήνεια έννοιες, ορισμούς, νόμους... Η διαφορά με όλους τους υπόλοιπους λαούς ήταν στο ύψος και στο βάθος της νόησης, μια που οι άλλοι λαοί αγκέστηκαν στην παρατήρηση και την εμπειρία και ποτέ δεν πέρασαν το κατώφλι της προεπιστημονικής “σκέψης”, κατά τον Otto Neugebauer, μελετητή των βαβυλωνιακών μαθηματικών.

Η μελέτη των αριθμών ξεκίνησε με τον Θαλή (τον 7<sup>ο</sup> π.Χ. αι.), στη συνέχεια με τον Πυθαγόρα και τη σχολή του Πλάτωνα, τον Θεαίτητο, τον Εύδοξο του Αριστοτέλη, τον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη, τον Ερατοσθένη, τον Θέωνα, τον Διόφαντο κ.ά. Μαθηματικά δίδασκαν στις σχολές τους –ο Πλάτωνας και οι Πυθαγόρειοι– μόνο για τη μόρφωση, αποσπασμένοι από κάθε άμεσο πρακτικό σκοπό. Όλοι τους στρέφονταν στη φιλοσοφία και στην ανάπτυξη της θεωρητικής και αφηρημένης πλευράς των μαθηματικών. Εκείνη την εποχή αναδείχθηκαν και οι μαθηματικοί: Ιπποκράτης, Χίος, Θεαίτητος, Εύδοξος, Ιππίας, Ζήνων κ.ά. Μετά τις νίκες και κατακτήσεις του Μ. Αλεξάνδρου η Αλεξάνδρεια έγινε οικονομικό και πνευματικό κέντρο. Τον ελληνικό πολιτισμό σκόρπισαν στην γύρω περιοχή οι αλεξανδρινοί έμποροι και έφεραν στην πατρίδα τους τις γνώσεις που είχαν συσσωρευτεί στο πέρασμα όλων αυτών των αιώνων. Έτσι, αναπτύχθηκαν τα μαθηματικά, η Αστρονομία, η Γεωγραφία, η Μηχανική και στο Μουσείο και τη Βιβλιοθήκη, που ίδρυσε ο διάδοχος του Μ. Αλεξάνδρου, ο βασιλιάς Πτολεμαίος ο Α', διακρίθηκαν μεγάλοι μαθηματικοί, όπως ο Αρχιμήδης, ο Ευκλείδης,

ο Απολλώνιος, ο Ήρων, ο Πάππος, ο Θέωνας και η κόρη του Υπατία, που δολοφονήθηκε όταν κήκε και η βιβλιοθήκη από φανατισμένους Χριστιανούς.

Ο *Πυθαγόρας* (5<sup>ος</sup> αι. π.Χ.), σύμφωνα με τον Πρόκλο, μετατρέπει τη μελέτη της γεωμετρίας σε σχήμα ελεύθερης παιδείας, σπουδάζοντας τις αρχές της επιστήμης και εξετάζοντας τα θεωρήματα με άυλο και νοητικό τρόπο. Στον Πυθαγόρα και τη σχολή του ανήκει η πρώτη προσπάθεια μαθηματικοποίησης της γνώσης σε αριθμητική βάση: “το παν αριθμός”. Στον Πυθαγόρα οφείλεται η διαίρεση των Μαθηματικών σε τέσσερις κλάδους: Αστρονομία, Αριθμητική, Γεωμετρία, Μουσική. Ίσως δεν είναι τυχαίο ότι ο Πυθαγόρας ήταν σχεδόν σύγχρονος του Βούδα, του Κουμφούκιου, του Μαχαβίρα, του Λάο Τσε και ίσως του Ζωροάστρη. Το είδος Μαθηματικών και μυστικισμού που καλλιέργησε έχει απόηχους ακόμα και σήμερα, κυρίως μέσω της εξέλιξής του, τον 3<sup>ο</sup> αι. π.Χ., του Νεοπλατωνισμού. Το σημαντικότερο στον Πυθαγόρα και τους οπαδούς του είναι η μαθηματική τους φιλοσοφία. Η πεποίθησή τους ότι τα μαθηματικά είναι η μία και μοναδική πηγή αληθινής γνώσης έφτασε μέχρι εμάς μέσω φιλοσόφων και μαθηματικών όπως ο Πλάτωνας, ο Πλωτίνος, ο Ιάμβιχος και ο Πρόκλος, και αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο του Νεοπλατωνισμού, ο οποίος βρήκε αργότερα διάφορες εκφάνσεις στη δυτική σκέψη. Ο πιο σημαντικός αριθμός για τους Πυθαγόρειους ήταν το δέκα, η τετρακτύς, γιατί ήταν το άθροισμα του  $1+2+3+4$ . Έγινε το σύμβολο των Πυθαγόρειων, οι οποίοι προχώρησαν πολύ περισσότερο από οποιονδήποτε προηγούμενο αριθμητικό μυστικισμό, στην κατασκευή ενός σύμπαντος στο οποίο οι αριθμοί είχαν και φιλοσοφικό ρόλο. Οι πυθαγόρειοι δημιούργησαν την αριθμητική ανάλυση της μουσικής και εδώ η τετρακτύς συμβόλιζε τις βασικές αναλογίες ανάμεσα στις νότες, αρχίζοντας από το λόγο 1:2 για την οκτάβα. Η όλη έννοια της αρμονίας των σφαιρών προέρχεται από αυτή την αριθμολογία της μουσικής, η οποία έμελλε να επηρεάσει το πλανητικό μοντέλο του Κέπλερ παραπάνω από 2.000 χρόνια αργότερα.

Τον 4<sup>ο</sup> αι. π.Χ. η Αθήνα υπήρξε το κέντρο της μεσογειακής πνευματικής ζωής με την ίδρυση της Ακαδημίας του Πλάτωνα και του Λύκειου του Αριστοτέλη. “Μηδεὶς αγεωμέτητος εισιτω”. Ο Πλάτωνας, ο οποίος επηρέασε πάρα πολύ τη φιλοσοφία των μαθηματικών, είχε την πεποίθηση πως πρέπει να γνωρίζουν όλοι ότι υπάρχουν μερικά πράγματα των οποίων η ύπαρξη είναι απολύτως βέβαιη. Παρουσιάζει τα μαθηματικά ως πηγή αλήθειας και βεβαιότητας. Ο φιλόσοφος Πλάτωνας ζητά από τους μαθητές του να μελετούν τα μαθηματικά για να οξύνεται η σκέψη και το πνεύμα, ώστε να μπορεί να επιλύει δύσκολα προβλήματα πάσης φύσεως. Στην “Πολιτεία” διατείνεται ότι τα μαθηματικά θα έπρεπε να αποτελούν θεμελιώδη γνώση για τους μελλοντικούς ηγέτες.

Το πιο σημαντικό έργο της ιστορίας των ελληνικών μαθηματικών είναι αναμφίβολα τα Στοιχεία του *Ευκλείδη* (325-265 π.Χ.). Η φήμη των Στοιχείων επισκιάζει μερικές φορές το γεγονός ότι ο Ευκλείδης έγραψε και πολλά άλλα έργα για ζητήματα οπτικής, αστρονομίας, μηχανικής και μουσικής. Μεγάλο μέρος των Στοιχείων δεν είναι παρά σταχυολόγηση πολλών άλλων πηγών και πρέπει να είμαστε ευγνώμονες στον Ευκλείδη για τη συγκέντρωσή τους σε ένα γενικά



αποδεκτό μοντέλο λογικού παραγωγικού συστήματος θεωρημάτων και αποδείξεων. Τα Στοιχεία υπήρξαν το πιο σημαντικό εγχειρίδιο όλων των εποχών. Αντιγράφηκε τόσες φορές, ώστε να λέγεται πως ακολουθεί τη Βίβλο σε αριθμό εκδόσεων. Τα Στοιχεία του Ευκλείδη και η αυθεντία του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη οριοθετούν τον καθοριστικό ρόλο των μαθηματικών στην ιστορία της επιστημονικής σκέψης.

Ο *Αρχιμήδης*, η μέγιστη διάνοια της αρχαιότητας, είναι μοντέρνος στον πυρήνα της σκέψης του. Από όλους τους αρχαίους, είναι ο μόνος που συνήθιζε να σκέφτεται δίχως δεσμεύσεις. Υπήρξε πολυσύνθετος επιστήμονας, διορατικός και γόνιμος. Το μαθηματικό έργο του Αρχιμήδη είναι τεράστιο και πρωτοπόρο τόσο στη Γεωμετρία όσο και στην Αριθμητική και την Ανάλυση. Όλο αυτό το έργο χρησιμοποιήθηκε από τους μεταγενέστερους του, κυρίως από τους επιστήμονες του 16<sup>ου</sup>, του 17<sup>ου</sup> και του 18<sup>ου</sup> αιώνα, για τη δημιουργία και ανάπτυξη των κλάδων της Θεωρητικής Μηχανικής, της Στατιστικής, της Υδροστατικής, της Οπτικής κ.λπ. Σχεδόν στο σύνολο του αυτό το έργο του ακόμη και σήμερα παραμένει αναλλοίωτο και ισχυρό.

Ο *Θαλής* (625-546 π.Χ.), ο πρώτος ορθολογιστής φιλόσοφος, θεωρείται και ο πρώτος των επτά σοφών. Τον 7<sup>ο</sup> και τον 8<sup>ο</sup> αιώνα π.Χ., οπότε δημιουργήθηκαν οι ελληνικές εμπορικές πόλεις κράτη (Μίλητος, Αθήνα, Κόρινθος), ο έμπορος Θαλής ο Μιλήσιος με τα ταξίδια και τις συναλλαγές του είχε γνωρίσει τα ανατολικά Μαθηματικά. Στην Ιωνική Σχολή, που ίδρυσε, μελετήθηκε θεωρητικά ο αριθμός, μα και ο χώρος με ορθολογική σκέψη, μαθηματικά αξιώματα και απόδειξη (γενικότερα, οι Ίωνες Φιλόσοφοι είναι οι πρώτοι που ερμηνεύουν με αυτό τον τρόπο τα πράγματα και είναι αυτοί που φέρνουν την αντιλογία και τη γνωσιολογία στη Φιλοσοφία). Στον Θαλή, λοιπόν, τον Μιλήσιο αποδίδονται οι αποδείξεις των πρώτων γεωμετρικών προτάσεων αποδεικτικό σύστημα του Ευκλείδη. Ο σοφός Θαλής με σύνθετους υπολογισμούς προκαθόρισε και τους χρόνους στους οποίους γίνονται εκλείψεις του Ήλιου και της Σελήνης.

Ο *Ίππαρχος* (190-120 π.Χ.), μαθηματικός από τη Νίκαια, πόλη στο ελληνιστικό βασίλειο της Βιθυνίας της Μ. Ασίας, θεωρείται ο μεγαλύτερος αστρονόμος της εποχής του, μαζί με τον Εύδοξο από την Κνίδα, και είναι ο θεμελιωτής της αστρονομίας με βάση της ελληνικές γεωμετρικές αρχές. Το 134 π.Χ. χαρτογράφησε 1.080 άστρα! Εφάρμοσε τη διαίρεση του κύκλου σε 360 μοίρες ως βάση της τριγωνομετρίας και διαιρώντας κάθε μοίρα σε 60α υπολόγισε τα μήκη των χορδών του κύκλου ανά 1°. Επινόησε διάφορα αστρονομικά όργανα, σημαντικότερο από τα οποία ήταν ο επίπεδος αστρολάβος (150 π.Χ.), και έτσι περιέγραψε τις θέσεις των ουράνιων σωμάτων με μεγαλύτερη ακρίβεια (υπολόγισε το έτος σε 365 μέρες και 6 ώρες). Έφτιαξε ένα μοντέλο της κίνησης του Ήλιου και της Σελήνης χρησιμοποιώντας ένα γεωκεντρικό σύστημα επικύκλων. Δυστυχώς, από τα έργα του σώζεται ένα πολύ μικρό μέρος με αποτέλεσμα και αυτός, όπως και πολλοί άλλοι Έλληνες αστρονόμοι, να επισκιαστεί από τον Πτολεμαίο.

Για 1.000 με 1.400 χρόνια η αστρονομία βασίστηκε στο γεωκεντρικό σύστη-

μα, που αναπτύχθηκε από τον μεγάλο αστρονόμο και μαθηματικό του 2<sup>ου</sup> αιώνα μ.Χ. Κλαύδιο Πτολεμαίο. Ακόμα ο Πτολεμαίος, χρησιμοποιώντας την κωνική προβολή, ορίζει το σύστημα των γεωγραφικών συντεταγμένων ως πλέγμα παράλληλων και μεσημβρινών κύκλων. Συγκέντρωσε όλες τις γεωγραφικές γνώσεις των αρχαιότερών του στην οκτάτομη “Γεωγραφία”, καθώς και τις αστρονομικές γνώσεις στο ιστορικό έργο “Μεγίστη Μαθηματικής Σύνταξης”, το οποίο μετέφρασαν και μελέτησαν γύρω στο 820 οι Άραβες ως “Αλμαγέστη” (το ονόμασαν, δηλαδή, το Μέγιστο, επειδή το είχαν σε πολύ μεγάλη εκτίμηση). Η Αλμαγέστη του Πτολεμαίου ήταν για την Αστρονομία ό,τι τα Στοιχεία του Ευκλείδη για τη Γεωμετρία. Στη θεωρία του για την κίνηση της Σελήνης δανείζεται πολλά στοιχεία από τον Ίππαρχο και βελτιώνει το μοντέλο των επικύκλων· επίσης, συνδυάζοντας τις κινήσεις του Ήλιου και της Σελήνης, μελετά τις εκλείψεις τους. Μετά από ένα εκτεταμένο κατάλογο πάνω από 1.000 αστεριών, ο Πτολεμαίος έρχεται στις τροχιές των υπόλοιπων πέντε πλανητών. Η ιδιοφυής σύλληψή του περιλαμβάνει ένα σημείο, που ονομάζει εξισωτή, το οποίο απέχει από τη γη όσο και το έκκεντρο, αλλά, από τη άλλη πλευρά, το πτολεμαϊκό μοντέλο είναι, με μεγάλη διαφορά, η πιο επιτυχημένη προσπάθεια προβλεπτικής αστρονομίας που αναπτύχθηκε ποτέ, ικανή να αναπαραστήσει τις παρατηρούμενες τροχιές των πλανητών, ακόμα και τις ανάδρομες! Η γεωγραφική αφήγησή του (2<sup>ος</sup> μ.Χ. αιώνας) και οι πτολεμαϊκοί χάρτες αποτέλεσαν τον κύριο οδηγό για την ανθρωπότητα για 15 περίπου αιώνες, και αναθεωρήθηκαν μόνο τον 17<sup>ο</sup>-18<sup>ο</sup> αιώνα από τις μεγάλες γεωγραφικές ανακαλύψεις.

Ο Εύδοξος από την Κνίδα (ελληνική αποικία στη Μ. Ασία) είναι ένας από τους σημαντικότερους επιστήμονες του 4<sup>ου</sup> αιώνα π.Χ.. Στο ενεργητικό του έχει δύο θεμελιώδεις ανακαλύψεις: τη θεωρία των αναλογιών και τη μέθοδο της εξάντλησης. Η θεωρία των αναλογιών του θα χρησιμοποιηθεί, στα τέλη του 19<sup>ου</sup> αιώνα, από τον Ντέντεκιντ στη θεωρία των άρρητων αριθμών και η μέθοδος της εξάντλησης θα ξεπεραστεί μόνο το 17<sup>ο</sup> αιώνα με τη μεγαλοφυΐα του Νεύτωνα και του Λάιμπνιτς. Το φαινομενικό αδιέξοδο των ασύμμετρων παρακάμφθηκε κατά μεγάλο μέρος, δεδομένου ότι μπορούσαν να χρησιμοποιούν τα γινόμενα και τα πηλίκα τους μέσω των αναλογιών του Εύδοξου. Τα τελευταία τρία βιβλία των Στοιχείων του Ευκλείδη χρησιμοποιούν τη μέθοδο εξάντλησης του Εύδοξου για την εύρεση, με αυστηρό μαθηματικό τρόπο, εμβαδών και όγκων μέσω αλληπάλληλων προσεγγίσεων. Ο Αρχιμήδης απέδωσε στον Εύδοξο την πρώτη απόδειξη του όγκου του κώνου σε σχέση με αυτόν του κυλίνδρου, και ένα μεγάλο μέρος του XII θεωρείται ότι βασίζεται στην εργασία του Εύδοξου.

Ο Ερατοσθένης, που το 236 π.Χ. έγινε διευθυντής της περιφημής βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας, γεννήθηκε στην Κυρήνη (ελληνική αποικία στη Λιβύη) και σπούδασε στην Αθήνα. Φιλόσοφος, μαθηματικός, αστρονόμος, φυσικός, ποιητής και φιλόλογος, ήταν ο πρώτος που υποστήριξε ότι η γη είναι σφαιρική και γι' αυτό άλλωστε μέτρησε και την περιμέτρώ της. Περιέγραψε με επιστημονική μέθοδο χάρτη της οικουμένης με ορθογώνιο σύστημα αναφοράς από μεσημβρινούς και παράλληλους σε ανισομερές πλέγμα. Μετά από 400 χρόνια εμφανί-



στηκε το πρώτο βασικό εγχειρίδιο χαρτογραφίας. Το κυριότερο επίτευγμά του ήταν η μέτρηση του γήινου μεσημβρινού με πάρα πολύ καλή προσέγγιση της πραγματικής τιμής αυτού του μήκους. Ο ίδιος βρήκε στο 364,25 μέρες και αργότερα ο Σωσιγένης συνέταξε το Ιουλιανό (364,2425 είναι το Γρηγοριανό ημερολόγιο). Με τη βοήθεια του *Σωσιγένη* (44 π.Χ.), που του ζήτησε ο Ιούλιος Καίσαρ, θέλοντας να διορθώσει τις χρονικές αποκλίσεις στο ημερολόγιο της Ρώμης, εγκαθίδρυσε το Ιουλιανό ημερολόγιο, το οποίο φέρει το όνομά του. Ο Σωσιγένης προσέθεσε τις 90 μέρες στο έτος 45 π.Χ., που είχαν “χαθεί” από τους εσφαλμένους υπολογισμούς των επτά προηγούμενων αιώνων. Ο Σωσιγένης, υπολογίζοντας ότι η διάρκεια του έτους ισούται με 365 ημέρες και 6 ώρες, όρισε στο Ιουλιανό ημερολόγιο τα έτη να έχουν 365 μέρες και σε κάθε τέταρτο έτος προσέθεσε μία ακόμη ημέρα μετά “την έκτη προ των καλενδών του Μαρτίου”, η οποία ονομάστηκε “δύς έκτη”, επειδή μετριόταν δύο φορές, και τα έτη που την είχαν χαρακτηρηρίστηκαν δίσεκτα.

Ο *Δημόκριτος* (460 – 370 π.Χ.), από τα Άβδηρα της Θράκης, με τα Μαθηματικά που έμαθε στην Ανατολή προσπαθούσε να υπολογίσει τους όγκους των κώνων και των πυραμίδων. Ήταν ο πρώτος που μίλησε για την έννοια των απειροστών. Ο *Λεύκιππος* (ο δάσκαλός του) θεωρείται εισηγητής της ατομικής θεωρίας και ο *Δημόκριτος* ο θεμελιωτής της. Ο *Διόφαντος* (μέσα του 3<sup>ου</sup> μ.Χ. αιώνα) με το έργο του *Αριθμητικά* γίνεται πρόδρομος του μαθηματικού συμβολισμού, συμβάλλει στην ανάπτυξη της Άλγεβρας και θέτει τις βάσεις στο πιο σημαντικό κεφάλαιο των σύγχρονων Μαθηματικών, τη διοφαντική ανάλυση. Ο *Ζήνων* ο *Ελεάτης* (5<sup>ος</sup> π.Χ. αιώνας) με τα παράδοξά του μελετά και εμβαθύνει στις δυσκολίες που ανακύπτουν στην έρευνα της έννοιας του απείρου. Ο *Αρίσταρχος* ο *Σάμιος* (3<sup>ος</sup> π.Χ. αιώνας) διατυπώνει πρώτος τη θεωρία του ηλιοκεντρικού συστήματος – το σύστημα του Κοπέρνικου είχε τον πρόδρομό του στην Ελλάδα. Ο *Δικαίαρχος* (τέλη 4<sup>ου</sup> - αρχές 3<sup>ου</sup> π.Χ. αιώνα) εισήγαγε στο χάρτη δύο γραμμές κάθετες μεταξύ τους, που αναπαριστούν τον παράλληλο και τον μεσημβρινό της γης, και διαιρεί την οικουμένη (το κατοικημένο τμήμα της) σε τέσσερα μέρη. Γίνεται, έτσι, ο πρώτος που καθόρισε άξονες αναφοράς στη γήινη σφαίρα.

Στον *Απολλώνιο* (250-170 π.Χ.) οφείλεται η συστηματική σπουδή των κωνικών τομών (δηλαδή η θεωρία αλγεβρικών καμπύλων 2<sup>ου</sup> βαθμού). Χωρίς αυτές δεν θα μπορούσαν να δημιουργηθούν το 16<sup>ο</sup> και το 17<sup>ο</sup> αιώνα η καινούρια αστρονομία και μηχανική, οι νόμοι του Κέπλερ και η μηχανή του Νεύτωνα.

Ο *Μαρίνος ο Τύριος* (-100 π.Χ. αι.) επινόησε την ορθή κυλινδρική προβολή, δηλαδή την αναπαράσταση της επιφάνειας της γήινης σφαίρας πάνω στο ανάπτυγμα κυλινδρικής επιφάνειας που εφάπτεται στον ισημερινό.

Τον 4<sup>ο</sup> αιώνα μ.Χ. η λάμψη της Αλεξάνδρειας σβήνει και περιορίζονται οι προσωπικές ελευθερίες. Η *Υπατία* (περ. 370-415), κόρη του Θέωνα του Αλεξανδρέως, πρώτη γυναίκα μαθηματικός στην ιστορία, ήταν επικεφαλής της Πλατωνικής Σχολής στην Αλεξάνδρεια. Καθώς το όλο και ισχυρότερο χριστιανικό κίνημα δεν ανεχόταν αυτό που θεωρούσε ειδωλολατρική επιστήμη και φιλοσοφία, θανατώθηκε από έναν όχλο φανατισμένων χριστιανών.

## Βιβλιογραφία

- Αρτεμιάδης, Ν.Κ.: «Η Γεωμετρία των Fractals», *Μαθηματική Επιθεώρηση*, τ. 44, 1995.
- Mandelbrot, B.B.: *The Fractal geometry of Nature*, Freeman, N. York 1983.
- Δρακόπουλος, Β.: *Εισαγωγή στο Πολυσχίδη και τη Χαοτική Δυναμική*, Master Thesis, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1992.
- Peak, D. - Frame, M.: *Chaos Under Control*, Freeman, N. York 1994.
- Bell, E.T.: *Οι μαθηματικοί*, τόμος : *Από το Ζήγωνα ως τον Cauchy*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης 1992.
- David, F. - Briggs, Peat-John: *Μία αιρετική άποψη για το Χάος στην καθημερινή μας ζωή*, Τραυλός, Αθήνα 2001.
- Εξαρχάκος, Θ. Γ.: *Εισαγωγή στα Μαθηματικά*, τόμος Α': Άλγεβρα, Αθήνα 1991.
- Εξαρχάκος, Θ. Γ.: *Εισαγωγή στα Μαθηματικά*, τόμος Β': Ανάλυση, Αθήνα 1993.
- Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, *Πρακτικά 17<sup>ου</sup> Συνεδρίου*, Αθήνα, 2000.
- Εξαρχάκος, Θ. Γ.: *Ιστορία των Μαθηματικών*, τόμοι Α' και Β'. Αθήνα 1993.
- Εξαρχάκος, Θ. Γ.: "Η Φιλοσοφία λύσης προβλημάτων στην αρχαία Ελλάδα", *Πρακτικά 11<sup>ου</sup> Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικά Παιδείας*, Ε. Μ. Ε 1994.
- Τζέτζης, Ι.: *Χιλιάδες*, V I I I, 1972.
- Κάτσικας, Χ. - Καββαδίας, Γ.: *Η ελληνική εκπαίδευση στον ορίζοντα του 2000: Εκπαιδευτικοί, μαθητές και σχολική πραγματικότητα*, Gutenberg, Αθήνα 1995.
- Kline Morris: *Mathematics in Western Culture*, Oxford University Press, Inc., N. York 1981.
- Μακροδής, Γ.: «Fractals σαν εργαλείο δημιουργίας αλλά και εκτίμησης της δύναμης των Μαθηματικών από τους μαθητές», 10<sup>ο</sup> Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Ε. Μ. Ε 1993.
- Μπούνης, Α.: *Δυναμικά Συστήματα και Χάος*, τόμος Α', Παπασωτηρίου, Αθήνα 1995· τόμος Β' εκδ. Πανεπιστήμιο Πατρών, 1997.
- Μπούνης, Α.: *Ο θαυμαστός κόσμος των Φράκταλ*, Leader Books, Athens 2004.
- Poincare, H.: *Η αξία της επιστήμης*, Κάτοπτρο, Αθήνα 1997.
- Steen, A.L.: *Mathematics Today*, Vintage Books, 1982.
- Stewart, I.: *Life's Other Secret*. Penguin Books, England 1998.
- Stewart, I.: *Fearful Symmetry*, Penguin.
- Stewart, I. – Colubitsky, M.: "Είναι ο Θεός γεωμέτρης;", Κωσταράκη, Αθήνα, 1995.
- Τάξη και Χάος*, τόμοι Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΣΤ, Ζ και Η, Πρακτικά Ελληνικού Θερινού Σχολείου, Πνευματικό, Αθήνα 1988, 1990, 1993, 1998, 1999, 2000, 2001 και 2003.
- Τσουκαλάς, Κ.: *Ο κοινωνικός ρόλος των εκπαιδευτικών μηχανισμών στην Ελλάδα*, Θεμέλιο, Αθήνα 1987.
- Weyl, H.: *Συμμετρία*, Τροχαλία, Αθήνα 1991.