

Σύγκριση επιφανειών: Προτάσεις για τη διδασκαλία

Χαράλαμπος Αλεξόπουλος, Χαράλαμπος Γούτσος, Ανδρέας Σκαλτσάς,
Δημήτρης Τάσιος
Δάσκαλοι

1. Θεωρητικό πλαίσιο

Στη βάση της μελέτης των αλληλεπιδράσεων μεταξύ της φύσης των μαθηματικών και της δομής της ανθρώπινης σκέψης βρίσκονται ορισμένα θεμελιώδη ερωτήματα, όπως με ποιο τρόπο οι άνθρωποι μαθαίνουν Μαθηματικά, ποιος είναι ο τρόπος σκέψης στα Μαθηματικά και πώς αναπτύσσεται η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Οι διάφορες παιδαγωγικές προσεγγίσεις στο χώρο των μαθηματικών διακρίνονται από τις διαφορετικές απαντήσεις που δίνουν στα ερωτήματα αυτά. Σύμφωνα με την εποικοδομητική προσέγγιση, μάθηση είναι η διαδικασία οικοδόμησης της γνώσης με την κατασκευή και επεξεργασία σχημάτων μέσα από βιωματικές εμπειρίες. Την προσέγγιση αυτή ακολουθεί ο ριζοσπαστικός κονστρουκτιβισμός, μια νεο-πιαζετιανή θεωρία, που στηρίζεται στις παρατηρήσεις του Piaget σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο το ίδιο το παιδί κατασκευάζει τη γνώση του, και αυτή φαίνεται να είναι σήμερα η επικρατέστερη άποψη ανάμεσα στους καθηγητές των μαθηματικών.

Σύμφωνα με το ριζοσπαστικό κονστρουκτιβισμό, η διαδικασία της μέτρησης περιλαμβάνει τη χρήση *αρχών* ή *σταθερών μέτρησης*. Οι Piaget, Inhelder και Szeminska (1960) προσδιορίζουν τη διαδικασία της μέτρησης ως εξής: «Η μέτρηση (στην Ευκλείδειο Γεωμετρία) συνίσταται στο να πάρουμε ένα στοιχείο από ένα σύνολο και να το θεωρήσουμε ως μονάδα και κατόπιν να το μεταφέρουμε στο υπόλοιπο του συνόλου. Η μέτρηση, συνεπώς, είναι ένας συνδυασμός υποδιαίρεσης και αλλαγής θέσης». Η αλλαγή θέσης προϋπόθετει την κατανόηση ότι: (α) το μέγεθος της μονάδας διατηρείται και (β) η μονάδα μπορεί να χρησιμοποιηθεί επαναληπτικά.

Από τη σκοπιά του Piaget, η κατανόηση των αρχών της μέτρησης πρέπει να επιτευχθεί πριν τα παιδιά κατανοήσουν τους έτοιμους τρόπους που θα τους προσφερθούν από το πολιτισμικό τους περιβάλλον. Ένα επιπλέον βήμα στην κατανόηση της μέτρησης, σύμφωνα με τον Heroud (1987,1989), είναι η τυποποίηση της μέτρησης στα συμβατικά συστήματα.

Αντίθετα, μια κοινωνικοπολιτισμική προσέγγιση στην ανάπτυξη θεωρεί ότι η μέτρηση είναι ένας τρόπος αναπαράστασης αντικειμένων προς σύγκριση, όταν άμεσα αντιληπτικές συγκρίσεις είναι αναποτελεσματικές. Επομένως, οι τρόποι μέτρησης έχουν μεγαλύτερη αξία, όταν τα προβλήματα που περιλαμβάνουν μέτρηση δεν μπορούν να λυθούν μέσω άμεσων αντιληπτικών συγκρίσεων (Nunes et al., 1993).

2. Η μέτρηση του εμβαδού

Αν και το εμβαδόν μπορεί να μετρηθεί με μονάδες εμβαδού, αυτή η διαδικασία σπανίως χρησιμοποιείται στη σχολική πρακτική. Είναι πιθανόν παιδιά τα οποία κατανοούν τη διαδικασία της μέτρησης να μη μάθουν αυτόματα τις συμβατικές πρακτικές μέτρησης που διδάσκονται στο σχολείο. Η δυσκολία τους δεν μπορεί να εξηγηθεί με όρους «απουσίας της έννοιας του εμβαδού» ή «έλλειψης κατανόησης των λειτουργιών μέτρησης». Αντίθετα, μάλλον συσχετίζεται με την πολύπλοκη σχέση ανάμεσα στο εμβαδόν και στη διαδικασία μέτρησης που περιλαμβάνονται στη λύση πολλαπλασιασμού «μήκος επί πλάτος».

Η εμπειρία μάς λέει ότι πολλά παιδιά, τα οποία αποτυγχάνουν να λύσουν προβλήματα σύγκρισης εμβαδού βασισμένα στις μετρήσεις μήκους, μπορούν να βρουν σωστές εναλλακτικές λύσεις χρησιμοποιώντας μονάδες εμβαδού. Οι ακολουθούμενοι από το πολιτισμικό περιβάλλον του μαθητή τρόποι μέτρησης είναι εύλογο να διευκολύνουν τις δραστηριότητες λύσης προβλημάτων, όταν υπάρχει άμεση σχέση ανάμεσα στις μονάδες που χρησιμοποιούνται και τη μέτρηση του μεγέθους (όπως στο μήκος). Επιπλέον, η χρήση μονάδων εμβαδού για τις μετρήσεις του εμβαδού αποτελεί μια πιο άμεση αναπαράσταση της μέτρησης του μεγέθους και, συνεπώς, πιθανότατα διευκολύνει περισσότερο τη διαδικασία μέτρησης από ό,τι η συμβατική πρακτική.

Αναμένεται ότι τόσο η κατανόηση των αρχών μέτρησης όσο και ο τρόπος αναπαράστασης με διάφορα υλικά θα έχουν άμεσα αποτελέσματα στην επίδοση των μαθητών σε εργασίες σύγκρισης επιφανειών. Συνεπώς, αναμένουμε διαφορές στη λειτουργία της διαδικασίας της μέτρησης μεταξύ παιδιών της ίδιας ηλικίας, οι οποίες θα συνίστανται τόσο στη χρήση διαφορετικών υλικών για τη μέτρηση όσο και στην αιτιολόγησή τους. Επίσης, αναμένεται ότι οι συμβατικοί τρόποι μέτρησης θα διευκολύνουν τη δραστηριότητα λύσης προβλημάτων, όταν οι χρησιμοποιούμενες μονάδες σχετίζονται καθαρά με το μετρούμενο μέγεθος (λ.χ. το μήκος). Αντίθετα, οι συμβατικές πρακτικές είναι δύσχρηστες και δυσκολεύουν τη κατάσταση, όταν οι μονάδες που χρησιμοποιούνται δεν σχετίζονται άμεσα με το μέγεθος που μετριέται (όπως, λ.χ., στις επιφάνειες). Για παράδειγμα, το ίδιο όργανο, ο χάρακας, είναι πολύ χρήσιμο για τη μέτρηση του μήκους, αλλά μπορεί να δυσκολέψει τα πράγματα για τα παιδιά, όταν χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση του εμβαδού.

Με λίγα λόγια, πιστεύουμε ότι η ικανότητα των μαθητών να κάνουν μετρήσεις

δεν μπορεί να οριστεί χωρίς αναφορά στο υλικό που έχουν στη διάθεσή τους και, με την ίδια λογική, η χρησιμότητα ενός υλικού δεν μπορεί να οριστεί χωρίς αναφορά στο γιατί θα χρησιμοποιηθεί.

Στην περίπτωση της μέτρησης του μήκους τα πράγματα είναι απλά, γιατί ο χάρακας, το σχοινάκι κ.λπ. αντιπροσωπεύουν ένα μήκος. Αντίθετα, στην περίπτωση του εμβαδού η μέτρηση είναι πολύ διαφορετική από τη συμβατική διαδικασία που διδάσκεται στο σχολείο, όπου το εμβαδόν υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας τις διαστάσεις.

Συμπερασματικά, ο υπολογισμός του εμβαδού με τη συμβατική διαδικασία του πολλαπλασιασμού βρίσκεται σαφώς σε μεγάλη απόσταση από το τι αντιπροσωπεύει το εμβαδόν και, συνεπώς, όσο συστηματικά και αν προσπαθήσουμε να το διδάξουμε με αυτό τον τρόπο, θα είναι πιο δύσκολο να κατανοηθεί από τα παιδιά σε σχέση με ένα μη συμβατικό τρόπο μέτρησης.

3. Η έρευνα

3.1. Στόχοι

Η σύγκριση επιφανειών μπορεί να γίνει με τους εξής τρόπους:

- Μέτρηση σε μιλιμετρέ: επίθεση του σχήματος σε χαρτί μιλιμετρέ και μέτρηση (η περισσότερο ακριβής μέθοδος).
- Τριγωνοποίηση: Χωρισμός του σχήματος σε τρίγωνα και εύρεση εμβαδού με τη χρήση κυρίως η/υ (η πιο εύκολη μέθοδος, που απαιτεί το λιγότερο χρόνο).
- Σχεδιασμός γνωστών σχημάτων: αναγωγή του σχήματος σε γνωστά και εύρεση του εμβαδού τους.
- Επίθεση σχημάτων: τοποθέτηση του ενός σχήματος πάνω στο άλλο χωρίς μέτρηση με όργανα.
- Φυσικό μέγεθος: π.χ. γέμισμα των σχημάτων με πλαστελίνη και εύρεση του όγκου της πλαστελίνης ή γέμισμα των σχημάτων με επιφάνειες πλαστικές και ζύγιση τους.
- Μέτρηση περιμέτρου: ισχύει μόνο σε σύγκριση τετραγώνων, εφόσον τετράγωνα με μεγαλύτερα εμβαδά έχουν και μεγαλύτερη περίμετρο, και το αντίθετο.
- Έχοντας κατά νου τις μεθόδους αυτές, προσπαθήσαμε να διερευνήσουμε τις ενέργειες των μαθητών στο πλαίσιο του μαθήματος «*Διδακτικές προσεγγίσεις στις θετικές επιστήμες*», που διδάσκεται στο Διδακταλείο Δ.Ε. του Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Πατρών από την καθηγήτρια κ. Πόταρη Δέσποινα. Στόχοι της έρευνας ήταν να διαπιστωθούν οι ιδέες των μαθητών για τη χρήση διάφορων υλικών σχετικά με το πρόβλημα της σύγκρισης επιφανειών και να εξεταστεί κατά πόσο η ίδια η σύγκριση επηρεάζει τη γνώση των μαθητών απέναντι στις έννοιες που συνδέονται με τα σχήματα και τις επιφάνειες. Επίσης, να διερευνηθεί κατά πόσο η ίδια η προσφορά εργαλείων στους μαθητές

επηρεάζει τη στάση τους απέναντι σε κάποιες γεωμετρικές έννοιες όπως αυτές της περιμέτρου και του εμβαδού.

3.2 Δεδομένα και μέθοδος

Η έρευνα έγινε στα τέλη Νοεμβρίου-αρχές Δεκεμβρίου 2002, στην Ε' τάξη του 38^{ου} Δημοτικού σχολείου Πατρών. Η τάξη είχε 10 μαθητές του ίδιου περιόπου επιπέδου, που για τις ανάγκες της έρευνας και για καθαρά πρακτικούς λόγους (για να μπορούν να ελεγχθούν καλύτερα) χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες, των 3, 3 και 4 ατόμων.

Σε κάθε ομάδα υπήρχε ένας εκπαιδευτικός ο οποίος κατέγραφε τις ενέργειες των παιδιών καθώς και τις σκέψεις τους με σύντομες επιτόπιες συνεντεύξεις. Ο τέταρτος εκπαιδευτικός λειτουργούσε επικουρικά. Οι ενέργειες των ομάδων φωτογραφίζονταν.

Το πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές ήταν το ακόλουθο:

«Ο Δήμος, για να φτιάξει μια παιδική χαρά, πρέπει να συγκρίνει δύο οικόπεδα. Εσείς ποιο θα προτείνετε ως μεγαλύτερο, για να έχετε και περισσότερο χώρο να παίζετε;»

Ζητήθηκε από τα παιδιά να γίνουν όσο το δυνατό λιγότεροι μαθηματικοί υπολογισμοί και να προσπαθήσουν να συγκρίνουν τα σχήματα χρησιμοποιώντας δοσμένα υλικά. Ως οικόπεδα στο παραπάνω πρόβλημα δόθηκαν στα παιδιά τρία ζευγάρια σχημάτων. Στο πρώτο επίπεδο δόθηκαν δύο γνωστά σχήματα, ένα τρίγωνο και ένα τετράγωνο, με ίδιο εμβαδόν και διαφορετική περίμετρο. Στο δεύτερο επίπεδο δόθηκαν δύο κλειστά σχήματα, των οποίων οι πλευρές είναι ευθύγραμμα τμήματα, με ίδια περίμετρο και διαφορετικό εμβαδόν. Στο τρίτο επίπεδο δόθηκαν δύο κλειστές καμπύλες με διαφορετική περίμετρο και διαφορετικό εμβαδόν.

Τα υλικά που προσφέρθηκαν στα παιδιά θα μπορούσαμε να τα κατατάξουμε σε δύο κατηγορίες:

- Φυσικά υλικά: φακές, μακαρόνια, οδοντογλυφίδες, αφρώδες πλαστικό, καρφίτσες, σχοινάκι.
- Συμβατικά υλικά: χάρακας, διαβήτη, χαρτί μιλιμετρέ, διαφανές χαρτί, ψαλίδι, πλαστελίνη, χαρτόνια.

Τέλος, το γνωστικό επίπεδο των μαθητών τη στιγμή της έρευνας περιλάμβανε:

- τη χρησιμοποίηση κοινά αποδεκτών μονάδων μέτρησης,
- τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού,
- πώς να βρίσκουν το εμβαδόν του τετραγώνου και του ορθογωνίου, όχι όμως και του τριγώνου.

4. Αποτελέσματα

Η έρευνα διακρίθηκε σε τρεις φάσεις. Στην Α' φάση διαπιστώθηκαν τα εξής:

Χρησιμοποίηση των υλικών

- Το μιλμετρέ ήταν άγνωστο στους μαθητές και δεν χρησιμοποιήθηκε, παρόλο που έγιναν παρεμβάσεις γι' αυτό.
- Το σχοινάκι πιθανόν να μπέρδεψε τα παιδιά ωθώντας τα να μετρήσουν την περίμετρο.
- Οι φακές και τα μακαρόνια αποδείχτηκαν δύσχρηστα.
- Ο διαβήτης, το αφρώδες πλαστικό και οι οδοντογλυφίδες παρέμειναν αχρησιμοποίητα.

Ενέργειες των μαθητών

- Μέτρησαν και σύγκριναν περίμετρο.
- Έκαναν μετασχηματισμούς σε τυχαία σχήματα και σύγκριση με επίθεση.
- Έκαναν μετασχηματισμούς σε ίδιο είδος σχήματος.
- Επιχείρησαν εισαγωγή αυθαίρετης (προσωπικής) μονάδας μέτρησης (κοινής) και σύγκριση μέτρων.
- Σύγκριναν σχήματα χωρίζοντάς τα σε ορθογώνια διαφορετικών μεγεθών, των οποίων τα εμβαδά υπολόγισαν με τους γνωστούς τύπους.
- Μέτρησαν όγκο.
- Ο σχεδιασμός γνωστών σχημάτων δούλεψε στο α' και λίγο στο β' επίπεδο.
- Η τριγωνοποίηση δεν επιχειρήθηκε καθόλου.
- Η διαδικασία της επίθεσης ολόκληρων σχημάτων δύσκολα χρησιμοποιήθηκε.
- Χρησιμοποιήθηκε όμως προσαρμοσμένη επίθεση (μετατροπή του ενός σχήματος, ώστε να «μπει μέσα» στο άλλο).

Στη Β' φάση, τα παιδιά κλήθηκαν σε ατομικές συνεντεύξεις μια εβδομάδα αργότερα. Σε αυτή τη φάση χρησιμοποιήθηκαν η/υ, βιντεοκάμερα και κασετόφωνο. Σε κάθε μαθητή αρχικά δείχνονταν στον η/υ οι δικές του ενέργειες καθώς και των συμμαθητών του από την Α' φάση. Από τους μαθητές ζητούνταν:

1. να περιγράψουν τον τρόπο σκέψης τους σύμφωνα με τον οποίο ενέργησαν·
2. να περιγράψουν τις ενέργειες που έκαναν για να λύσουν το πρόβλημα, σαν να μιλούσαν σε φίλο τους στο τηλέφωνο (χωρίς να τους βλέπει)·
3. να σχολιάσουν, να συμπληρώσουν ή να αλλάξουν τις ενέργειες συμμαθητών τους·
4. να κρίνουν τα υλικά που είχαν στη διάθεσή τους·
5. να πουν πώς θα έλυναν το πρόβλημα, αν δεν είχαν στη διάθεσή τους υλικά.

Τα συμπεράσματα μας από τη Β' φάση συνοψίζονται στα εξής:

- Η χρήση των η/υ και η επίδειξη της όλης δραστηριότητας από την Α' φάση βοήθησε τους μαθητές τόσο να εκφραστούν όσο και να κάνουν παρατηρήσεις για τους συμμαθητές τους.

- Το μιλιμετρέ, ενώ αρχικά ήταν άγνωστο και δεν χρησιμοποιήθηκε, τώρα τους ήταν πιο οικείο και το προτιμούσαν.
- > Οι φακές και τα μακαρόνια ως υλικά αποδείχτηκαν δύσχρηστα. Ήταν μικρά και τους ταλαιπωρούσαν. Παρ' όλα αυτά, χρησιμοποιήθηκαν και παραμένουν στα επιλεγμένα από τους μαθητές υλικά.
- Κάποια υλικά (καρφίτσες, σχοινάκι, διαβήτη, αφρώδες πλαστικό) απορρίφθηκαν ως άχρηστα.
- Έγινε κατανοητή πλέον η διαφορά μεταξύ περιμέτρου και εμβαδού. Οι μαθητές που είχαν μπερδέψει στην αρχή την περίμετρο με το εμβαδόν, έχοντας τώρα μπροστά τους όλες τις ενέργειες των συμμαθητών τους, φάνηκε να έχουν ξεπεράσει αυτή τη δυσκολία και να κρίνουν ως λαθεμένη την αρχική τους άποψη (μεταγνώση).
- Αν τα σχήματα είχαν μικρές διαφορές στο εμβαδόν, ίσως κατέληγαν στο ότι είναι ίσα. Οι μέθοδοι που εφαρμόζαν, ακόμα και στο μιλιμετρέ χαρτί, όπου μετρούσαν τα μεγάλα μόνο τετράγωνα, δεν μπορούν να θεωρηθούν ακριβείς και αφορούν κυρίως ακανόνιστα και καμπυλοειδή σχήματα (2° και 3° επίπεδο).
- Η σύγκριση χωρίς υλικά φάνηκε σε αυτή τη φάση πως λειτουργήσε καλύτερα σε όλους τους μαθητές, πράγμα που δείχνει ότι κατανόησαν την επίθεση ως τρόπο σύγκρισης επιφανειών, κάτι που στην αρχή τουλάχιστον της Α' φάσης δεν επιχειρήθηκε καν.

Στην Γ' φάση, παράλληλα με αυτά που ζητήθηκαν από τα παιδιά στην προηγούμενη φάση, τους ζητήθηκε να λύσουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας ένα νέο υλικό, το γεωπίνακα, και λαστιχάκια. Διαπιστώθηκε ότι ο γεωπίνακας εξυπηρετεί ως υλικό για τη σύγκριση επιφανειών με ορισμένες προϋποθέσεις, όπως:

- ⇒ Τα προς σύγκριση σχήματα να είναι υπολογισμένα για το γεωπίνακα, ώστε να μπορούν να απεικονιστούν πάνω σε αυτόν με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια.
- ⇒ Τα σχήματα με καμπύλες δεν μπορούν να απεικονιστούν πάνω στο γεωπίνακα. Σε τέτοιας μορφής σχήματα οι μαθητές προτίμησαν μιλιμετρέ χαρτί, του οποίου χρησιμοποιώντας τα μικρά τετραγωνάκια υπολογίζουν με μεγαλύτερη ακρίβεια. Βλέπουμε εδώ, λοιπόν, ακόμη καλύτερη χρήση του μιλιμετρέ.
- ⇒ Τα λαστιχάκια του γεωπίνακα δεν αποδείχτηκαν και πολύ εύχρηστα στους μαθητές (τους έφευγαν). Αν, όμως, πρόκειται να χρησιμοποιηθούν, καλό είναι να χρησιμοποιούνται λαστιχάκια διάφορων χρωμάτων για καλύτερη απεικόνιση των σχημάτων.
- ⇒ Χρειάζεται ένας ή και πολλές φορές δυο γεωπίνακες (για τα μεγαλύτερα σχήματα) για κάθε παιδί. Οι μαθητές θέλουν να έχουν μπροστά τους και τα δύο σχήματα που θέλουν να συγκρίνουν και όχι να δουλεύουν εκ περιτροπής στους γεωπίνακες.

Συμπερασματικά, ο γεωπίνακας αποτελεί πολύ καλό υλικό για το πέρασμα των μαθητών από την αυθαίρετη στη συγκεκριμένη μονάδα μέτρησης επιφανειών.

5. Συμπεράσματα και προτάσεις

Όσον αφορά την αναγκαιότητα της χρήσης φυσικών υλικών, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα φυσικά υλικά εξυπηρέτησαν τους μαθητές. Η επιλογή τους όμως πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή, ώστε να είναι και χρηστικά και να μην καταναλώνεται πολύς χρόνος στη χρήση τους (για παράδειγμα, οι φακές ήταν ιδιαίτερα δύσκολο να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές). Επίσης, τα φυσικά υλικά δεν μπορούν να δώσουν αποτελέσματα με ακρίβεια, άρα δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη σύγκριση επιφανειών με μικρή διαφορά.

Όσον αφορά τη συμπεριφορά των μαθητών απέναντι στα υλικά, στη συγκεκριμένη έρευνα φάνηκε καθαρά ότι δεν υπήρχε ευχέρεια από τα παιδιά στη χρησιμοποίηση νέων υλικών (για παράδειγμα, το διαφανές χαρτί δεν χρησιμοποιήθηκε καθόλου στην αρχή). Ενώ στην αρχή, λοιπόν, τα νέα υλικά ξένισαν τα παιδιά, στη συνέχεια τα καλοδέχτηκαν. Καθετί καινούριο στην τάξη, και όταν, μάλιστα, αυτό ξεφεύγει από τα στενά όρια του «κλασικού» μαθήματος, οι μαθητές το καλοδέχονται και τους αρέσει να πειραματίζονται πάνω σε αυτό. Αυτό, όμως, μπορεί να αποτελέσει τροχοπέδη στον εκπαιδευτικό, παίρνοντάς του πολύ χρόνο, τουλάχιστον όταν πρωτοχρησιμοποιεί κάτι.

Όσον αφορά το ρόλο των υλικών, δεν πιστεύουμε ότι εξυπηρετεί σε τίποτα να δίνουμε στα παιδιά υλικά τα οποία όχι μόνο δεν υπάρχει πιθανότητα να χρησιμοποιήσουν, αλλά, αντίθετα, θα τους δημιουργήσουν και προβλήματα. Οι μαθητές, είτε επειδή πιστεύουν ότι πρέπει να χρησιμοποιηθεί ό,τι φέρνει ο δάσκαλος είτε για να παίξουν, χρησιμοποιούν τα πάντα και έτσι οδηγούνται πολλές φορές σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Επομένως, πρέπει να προσδιοριστεί ποια υλικά πρέπει να αποκλειστούν και με ποια κριτήρια ο δάσκαλος θα επιλέξει κάποια από αυτά. Οι μαθητές μάς εκπλήσσουν πολλές φορές, ανακαλύπτοντας χρήσιμες υλικών που ούτε καν περνούν από το μυαλό μας και αυτό πράγματι αξίζει περαιτέρω έρευνας.

Όσον αφορά την αναγκαιότητα της σύγκρισης των επιφανειών και τη μεταγνώση, μετά από την όλη διαδικασία πιστεύουμε ότι οι μαθητές κατανόησαν απόλυτα τη διαφορά μεταξύ περιμέτρου και εμβαδού και ταυτόχρονα κατανόησαν την αναγκαιότητα χρήσης μιας συγκεκριμένης μονάδας μέτρησης. Στην αρχή η μονάδα μέτρησης είναι αυθαίρετη (κατασκευαζόμενη από τους ίδιους τους μαθητές), όπως, εξάλλου, προβλέπει και το αναλυτικό πρόγραμμα, και στη συνέχεια γίνεται συγκεκριμένη (γεωπίνακας).

Καταλήγοντας, έχουμε να κάνουμε τις εξής προτάσεις για τη σύγκριση επιφανειών και τη χρήση υλικών στη διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών και συγκεκριμένα μονάδων μέτρησης επιφανειών:

- Ορισμένα υλικά, όπως το χαρτόνι ή άλλο υλικό, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στις μικρές τάξεις, για να αποτελέσουν αυθαίρετες μονάδες μέτρησης. Φυσικά, ακόμα καλύτερο είναι να ανακαλύψουν τα παιδιά δικές τους μονάδες.
- Στην Γ' τάξη, όπου αρχίζει να γίνεται διαισθητική προσέγγιση της βασικής μονάδας μέτρησης, χρειάζεται μια σειρά ενεργειών, οι οποίες θα ξεκινούν από καλά επιλεγμένα φυσικά υλικά, θα περνούν στο γεωπίνακα και στο μιλιμετρέ, και θα καταλήγουν στη συγκεκριμένη μονάδα μέτρησης. Έτσι, στην Δ' τάξη θα μπορούσαμε να περάσουμε στην καλύτερη χρήση των ίδιων υλικών (γεωπίνακα, μιλιμετρέ), για να καταλήξουμε στην αριθμητική μέτρηση του εμβαδού.

Όπως είναι φυσικό, τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής πρέπει να εξεταστούν μακροσκοπικά, δηλαδή να διαπιστωθεί σε επόμενη φάση αν η συγκεκριμένη διδακτική ενέργεια έχει διαχρονικά γνωστικά αποτελέσματα στους μαθητές. Η συγκεκριμένη έρευνα, επίσης, έχει το μειονέκτημα ότι δεν εντάχθηκε στο πλαίσιο του Αναλυτικού Προγράμματος, κάτι που θα βοηθούσε περισσότερο στην εξαγωγή συμπερασμάτων. Ωστόσο, πιστεύουμε ότι θα μπορούσε να αποτελέσει τη βάση για μια μεγαλύτερη έρευνα, σε μεγαλύτερο βάθος χρόνου και σε περισσότερες τάξεις, ώστε να επαληθευτεί η ισχύς των συμπερασμάτων μας.

Βιβλιογραφικές παραπομπές

- Heroud, B. (1987). Conceptions of area units by 8-9 years old children. In J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (eds.), *Proceedings of the 11th International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 299-304). Montréal: Université de Québec á Montréal.
- Heroud, B. (1989) A conceptual analysis of the notion of length and its measure. In G. Vergnound, J. Rogalski & M. Artigue (eds). *Proceedings of the 13th International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 83-89). Paris: CNRS-Paris.
- Nunes, T., Light, P. & Mason, J. (1993). Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and Instruction* (Vol. 3, pp 39-54). Pergamon Press Ltd.
- Piaget, J., Inhelder, D. & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. New York: Harper and Row.