Διδακτικές απόψεις ενός δασκάλου και μαθησιακές πρακτικές των μαθητών του σε διαθεματικές προσεγγίσεις με βάση τα μαθηματικά

Ιωάννης Θ. Λαζαρίδης

Σχολικός Σύμβουλος 3ης Περιφέρειας Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης Δυτικής Αττικής, Υποψήφιος Διδάκτορας, M.Sc.

Εισαγωγή

Πριν από μία δεκαετία άρχισε η εφαρμογή της Διαθεματικής Προσέγγισης και στη χώρα μας με τη μορφή Σχεδίων Εργασίας (Projects) και διαθεματικών δραστηριοτήτων, μέσα από τη θεσμοθέτησή της με το πρόγραμμα της Ευέλικτης Ζώνης και το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.). Οι υποστηρικτές της μεθόδου Project (Chard, 1992) δεν προτείνουν το μοντέλο εργασίας με τον τρόπο αυτό να αποτελέσει οδηγό για την εκπόνηση ολόκληρου του αναλυτικού προγράμματος. Περισσότερο το θεωρούν ως κάτι συμπληρωματικό στα πιο επίσημα συστηματικά μέρη του αναλυτικού προγράμματος. Η εργασία του Project δεν είναι ένα ξεχωριστό διδακτικό αντικείμενο, όπως τα μαθηματικά, για παράδειγμα. Προσφέρει όμως το πλαίσιο για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων. Θα πρέπει, δηλαδή, να θεωρηθεί ότι ενσωματώνεται στην υπόλοιπη εργασία που περιλαμβάνεται στο αναλυτικό πρόγραμμα.

Σχετικά με την αναγκαιότητα της εφαρμογής της διαθεματικότητας και στη μαθηματική εκπαίδευση, οι Dorfler & McLone (1986) αναφέρουν (σ. 75-76, μτφρ. από τον γράφοντα): «Τα τελευταία χρόνια, με την ανάπτυξη της τεχνολογίας, η αλληλεπίδραση των Μαθηματικών με τα άλλα επιστημονικά πεδία διευρύνθηκε τόσο ποσοτικά όσο και ποιοτικά. Τα Μαθηματικά μπορούμε να τα δούμε στο κέντρο ενός πολυσύνθετου δικτύου που τα συνδέει με τα άλλα μαθήματα. Αυτές οι συνδέσεις είναι αμφίδρομες. Τα άλλα μαθήματα είναι αμφότερα και πηγές για μαθηματικές ιδέες και πεδία εφαρμογής. Η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών με κατανόηση δεν μπορεί να επιτευχθεί σε απομόνωση, αν πράγματι αντιλαμβανόμαστε τα Μαθηματικά ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα που στοχεύει στην κατανόηση "της πραγματικότητας" και στη λύση προβλημάτων μέσα σ' αυτήν». Ο Whitehead (1948) πρότεινε ότι η μόνη λύση για βελτίωση του εκπαιδευτικού γίγνεσθαι είναι η κατάργηση της επιζήμιας αποσύνδεσης των γνωστικών πεδίων, που σκοτώνει τη ζωντάνια ενός σύγχρονου αναλυτικού προγράμματος. Ως προς την αναγκαιότητα σύνδεσης των γνωστικών πεδίων, τα Μαθηματικά μπορούν να αναδείξουν την ενοποιητική τους δύναμη στον τομέα *διαθεματικότητα*. Το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων των Μαθηματικών στις Η.Π.Α. (N.C.T.M.) στις Αρχές και τα Κριτήρια για τα Σχολικά Μαθηματικά (2000) περιλαμβάνει το κριτήριο "Connections", όπου αναφέρει ότι τα Π.Σ. από το Νηπιαγωγείο μέχρι τη 12η τάξη οφείλουν να καθιστούν τους μαθητές ικανούς να αναγνωρίζουν και να εφαρμόζουν Μαθηματικά σε πλαίσια έξω από τα Μαθηματικά. Ειδικότερα τα Σχολικά Μαθηματικά πρέπει να συμπεριλαμβάνουν ευκαιρίες για μαθηματική μάθηση μέσα από δραστηριότητες αναδυόμενες έξω από τα Μαθηματικά. Οι συνδέσεις μπορούν να γίνονται είτε με άλλα γνωστικά πεδία και μαθήματα είτε με την καθημερινή ζωή των μαθητών. Είναι απαραίτητη η δυνατότητα για βιωματική μάθηση των μαθηματικών σε ένα πλαίσιο.

Η διαθεματικότητα συνδέεται στενά με τη μέθοδο project. Η απαρχή της μεθόδου βρίσκεται στο φιλοσοφικό ρεύμα του πραγματισμού και στο κίνημα της «προοδευτικής αγωγής» με κύριο εκπρόσωπο τον Dewey (1916). Η διδακτική μέθοδος project τεκμηριώθηκε από τον Dewey και από τον μαθητή του Kilpatrick (1925), ο οποίος την όρισε ως μια δράση που είναι σκόπιμη και γίνεται με ενθουσιασμό. ΄Εχει πολλές δυνατότητες, τις οποίες, όπως σημειώνει ο Frey (1986), τις ανακαλύπτει κανείς κατά τη διάρκεια της βίωσης - εξέλιξης ενός project. Εμπεριέχει τη διαθεματικότητα, «ανοικτές» μαθησιακές καταστάσεις, την ομαδοσυνεργατική και βιωματική μάθηση σε αυθεντικά πλαίσια καθημερινής ζωής και το άνοιγμα του σχολείου στην κοινωνία.

Στο πλαίσιο ευρύτερης έρευνάς μου με σκοπό τη διερεύνηση πιθανών αλλαγών κατά την εφαρμογή διαθεματικών δραστηριοτήτων στη διδακτική συμπεριφορά των δασκάλων και στη μαθησιακή συμπεριφορά των μαθητών στα μαθηματικά, διεξήγαγα πιλοτικά την έρευνά μου στη χρονική διάρκεια ενός μήνα στη Δ′ Τάξη ενός Δημοτικού Σχολείου του Καρπενησίου, όπου δάσκαλος και μαθητές εργάστηκαν στη διαθεματική ενότητα: «Διατροφή-Θερμίδες». Ακολούθως γίνεται μια προσπάθεια αποτύπωσης του εγχειρήματος. Για να διαπιστωθούν οι πιθανές αλλαγές ύστερα από συγκρίσεις, παρατήρησα την τάξη και πριν από το διαθεματικό project, στο μάθημα μαθηματικών. Στην επιλογή της ενότητας «Θέματα Διατροφής», εκτός από καθαρά παιδαγωγικούς λόγους, με οδήγησαν: α) το άρθρο "Fractions attack" των Alcaro, Alston, Katims (2000), όπου η δασκάλα P. Alcaro διαπραγματεύεται με την τάξη της ένα διατροφικό θέμα· β) το θεσμικό πλαίσιο που διαμορφώνεται από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, μέσα από την εφαρμογή του Δ.Ε.Π.Π.Σ. και της Ευέλικτης Ζώνης, τα προγράμματα Περιβαλλοντικής Εκπαίδευσης και Αγωγής Υγείας· και γ) η γνωριμία με τον δάσκαλο Θ.Κ., που μου εκμυστηρεύτηκε ότι αναζητεί πρωτότυπα θέματα, για να τα επεξεργαστεί με τους μαθητές του, στα πλαίσια της Αγωγής Υγείας και της Ευέλικτης Ζώνης. Όταν του πρότεινα την επεξεργασία ενός διαθεματικού, διατροφικού θέματος, δέχτηκε με ενθουσιασμό.

Μεθοδολογία

Η μεθοδολογία της έρευνάς μας είναι καθαρά ποιοτική. Η μεθοδολογική προσέγγιση είναι η μελέτη περιπτώσεων, όπου ως περιπτώσεις εκλαμβάνονται οι σχολικές τάξεις που ενεπλάκησαν στην υλοποίηση αντίστοιχων project. Επομένως, η μεθοδολογική προσέγγιση βασίζεται στη συμμετοχική παρατήρηση και στην καταγραφή, κωδικοποίηση και ανάλυση των δεδομένων παρατήρησης. Έχοντας μια πειραματική διάσταση, δανείζεται μεθοδολογικά στοιχεία από την εθνογραφική έρευνα (Heath, 1982· Anderson, 1989) και την έρευνα δράσης (Altrichter, Posch & Somekh, 2001).

Επιδίωξη της έρευνας ήταν να κατορθώσω να ανοίξω ένα μικρό παράθυρο και να δω μέσα από τα μάτια (δυναμική ενσυναίσθησης) των μαθητών και του δασκάλου «τι πραγματικά συμβαίνει και πώς» στη συγκεκριμένη Δ′ τάξη, όταν ασχολείται με διαθεματικές δραστηριότητες σχετικές με τα μαθηματικά, για να οδηγηθώ στην «ενσυνείδηση»-“consiencitization” (Freire, 1973) των εμπλεκομένων στην τάξη των Μαθηματικών. Σε όλη τη διάρκεια αναπτύχθηκε ένας εσωτερικός διάλογος ανάμεσα σε εμένα και το υλικό μου, με στόχο την ενορατικότητα (reflexivity), την εξέταση του θέματος από διάφορες οπτικές γωνίες και τον έλεγχο της αξιοπιστίας της έρευνας. Συμμετείχα ενεργά σε όλες τις φάσεις επεξεργασίας της ενότητας και ο βαθμός συμμετοχής μου ήταν στο επίπεδο του «συμμετέχοντος ως παρατηρητή». Εφόσον επιδίωξή μου ήταν να μελετήσω την ενασχόληση μιας τάξης, με συγκεκριμένες διαθεματικές δραστηριότητες που σχετίζονται με τα μαθηματικά, η ενεργός εμπλοκή μου ήταν απαραίτητη, ώστε να προσανατολιστεί η όλη μαθησιακή διαδικασία. Η εμπλοκή μου είχε το μειονέκτημα ότι είχα χρόνο για ελάχιστες σημειώσεις κατά τη γέννηση των φαινομένων, γι’ αυτό η παρατήρηση και η καταγραφή δεδομένων βασίστηκαν κυρίως στη βιντεοσκόπηση και στη μνημονική μου ικανότητα.

Στο τέλος χρησιμοποίησα και τυπικές συνεντεύξεις στους μαθητές και στον δάσκαλο, με ερωτηματολόγια ανοικτού τύπου. Διαρκής ήταν η μέριμνα για τήρηση χαμηλών τόνων στη συμμετοχή μου, ώστε να υπάρχει η κατάλληλη απόσταση από τα δρώντα πρόσωπα και τα εν εξελίξει φαινόμενα, που θα μου επέτρεπε να λειτουργήσω αντικειμενικά διεξάγοντας ερευνητικό έργο με επιστημονικές προϋποθέσεις. Ακολουθώντας το παράδειγμα του Willis (1977), επέλεξα να παρουσιάσω πρώτα την περιγραφή της κοινωνικής σκηνής της τάξης και στη συνέχεια να εκθέσω χωριστά την ανάλυση που απορρέει από την περιγραφή και τη θεωρία που αναδύεται από την ανάλυση. Συνεχής ήταν η προσπάθεια χρήσης, στην έρευνά μου, των μεθόδων του τριγωνισμού (triangulation) και της αναλυτικής επαγωγής (analytic induction) ως αποδεικτικών εγκυρότητας και επιστημονικής αξιοπιστίας. Η ανάλυση θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως πραγματιστική (substantive) (Glaser & Strauss, 1968). Βασίστηκε αφενός σε ξαφνικές εμπνεύσεις και αναλυτικές ιδέες και αφετέρου στην καταγραφή αναλυτικών υπομνημάτων (memoranda) (Hammersley & Atkinson, 1983). Ακολούθησα τις οδηγίες ανάλυσης της Πηγιάκη (1994).

Η σκηνή της τάξης - Συντεταγμένες του εγχειρήματος

Κοινωνική Ομάδα έρευνας: Η Δ′ τάξη Δημοτικού Σχολείου του Καρπενησίου.

Υλικό Πλαίσιο: Μικρή αίθουσα ασφυκτικά γεμάτη. Διάταξη των θρανίων σε συνδυασμό μετωπικού σχήματος - «Π» ως εξής: ¦ = ¦.

Χρόνος: Ένας μήνας, 4 διδακτικά δίωρα Ευέλικτης Ζώνης για 4 εβδομάδες, σχολικό έτος 2003-04.

Ανθρώπινο Πλαίσιο: 1 δάσκαλος, 13 μαθητές (αγόρια: 9, κορίτσια: 4). Όταν εργάζονταν ομαδικά, χωρίζονταν σε 4 ομάδες: 3 των τριών και 1 των τεσσάρων.

Διδακτικό-Μαθησιακό Υλικό: Οι μαθητές διδάσκονταν ακόμη από το παλιό σχολικό βιβλίο των μαθηματικών. Μαζί με τον δάσκαλο συντάξαμε ένα φυλλάδιο 8 σελίδων με πληροφορίες και φύλλα εργασιών που μοιράσαμε στα παιδιά και χρησίμευσε ως σημείο αφετηρίας-αναφοράς. Συχνά, όμως, τα παιδιά επεξεργάστηκαν και άλλες πηγές πληροφόρησης, φύλλα εργασίας ή εικαστικά έργα. Εργάστηκαν ατομικά, γράφοντας στο φυλλάδιό τους, κατασκεύασαν δουλεύοντας σε ομάδες ραβδογράμματα και έφτιαξαν δικά τους προβλήματα, που έλυσαν. Συμπλήρωσαν το «Ημερολόγιο διατροφής και σωματικής άσκησης για 3 ημέρες». Επίσης, διανεμήθηκε και χρησιμοποιήθηκε ένας «Θερμιδομετρητής τσέπης έτοιμων φαγητών». Πρόσθετη εργασία ήταν η εικαστική τους έκφραση με θέμα: «Υγιεινή Διατροφή και Σωματική Άσκηση». Η τελευταία σελίδα του φυλλαδίου με τίτλο «Πόσες θερμίδες καίμε σε δέκα λεπτά[*]» ήταν ο προοργανωτής που εισήγαγε σε ένα ανοικτό Πρόβλημα, που δόθηκε σε ξεχωριστό φύλλο με τίτλο «Χρόνος Σωματικής Άσκησης για να καούν θερμίδες από διάφορες λιχουδιές» και εκτελέστηκε συνδυαστικά (βλ. δύο πίνακες ακολούθως).

Πόσες θερμίδες καίμε; Δείτε τι μπορείτε να κάνετε σε 10 λεπτά μόνο!

Σωματική άσκηση	Περπάτημα 	Ποδηλασία 	Πατινάζ 	Σχοινάκι 	Τρέξιμο 
Αντίστοιχες θερμίδες που καίγονται σε 10 λεπτά	25	40	50	60	80

* Προκειμένου να επιτευχθεί η σύγκριση των θερμίδων που καίγονται με τις διάφορες σωματικές ασκήσεις, η παράμετρος του χρόνου εκτέλεσης της άσκησης πρέπει να παραμένει σταθερή. Σε θερμιδομετρητές του εμπορίου, η κοινή βάση χρόνου για τη σύγκριση των θερμίδων είναι συνήθως η 1 ώρα. Εμείς για τις ανάγκες του προβλήματος επιλέξαμε ως κοινή βάση χρόνου τα 10 λεπτά.

Χρόνος σωματικής άσκησης που χρειάζεται για να καούν οι θερμίδες από διάφορες λιχουδιές

	Περπάτημα	Ποδηλασία	Πατινάζ	Σχοινάκι	Τρέξιμο
12-15 πατατάκια **(150 θερμίδες)**					
μπισκότο σοκολάτας **(55 θερμίδες)**					
μια φέτα κέικ καρότου **(240 θερμίδες)**					
μια μερίδα (μπάλα) παγωτού σοκολάτα **(300 θερμίδες)**	120 λεπτά				
15 νιφάδες (1 φλυτζάνι) ποπ-κορν **(120 θερμίδες)**					
ένα μεγάλο ποτήρι (10 oz) αναψυκτικού **(110 θερμίδες)**					
μια μερίδα λουκουμάδες **(280 θερμίδες)**					
100 γρ. σοκολάτας γάλακτος **(600 θερμίδες)**					

Κατά την παρουσίαση της πιλοτικής έρευνας, πρώτη φάση είναι η Περιγραφή κατά ημέρα, για την περιγραφή των διαλόγων και των τεκταινομένων κάθε συνάντησης. Ακολουθεί η Ανάλυση σε θεματικές κατηγορίες (Δάσκαλος, Ερευνητής, Μαθητές, Προβλήματα-Δραστηριότητες) όσων παρουσιάστηκαν στη φάση της Περιγραφής. Σύμφωνα με τη συστημική άποψη (Selvini-Palazzoli κ.ά., 1978), μια τάξη θεωρείται ως ένα σύστημα στο οποίο κάθε μέλος της τάξης εμπλέκεται σε μια σχέση με όλους τους άλλους. Μια αλλαγή στη συμπεριφορά ενός μέλους προκαλεί αλλαγή σε όλο το σύστημα. Τέλος, από την Ανάλυση των δεδομένων αναδύονται θεωρητικά συμπεράσματα. Για τις ανάγκες του άρθρου θα περιοριστούμε στην Περιγραφή της 3ης συνάντησης, στην Ανάλυση μόνο των θεματικών του Δασκάλου και των Μαθητών, και θα αναφέρουμε συμπεράσματα που προκύπτουν. Κύριο ερευνητικό ερώτημα στο οποίο θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε είναι το αν το πλαίσιο διαθεματικών δραστηριοτήτων με πυρήνα τα μαθηματικά, στο οποίο ενεπλάκησαν ο δάσκαλος μαζί με τους μαθητές του, αναδείχτηκε ως κατάλληλο πλαίσιο που προσέφερε ευκαιρίες για αλλαγή των παραδοσιακών αντιλήψεων και πρακτικών στο μάθημα των μαθηματικών.

Περιγραφή (Ημέρα 3η)

1. *Δάσκαλος: Συμφωνήστε καταρχάς όλα τα μέλη στην ομάδα ποια λιχουδιά θέλετε. Διαλέξτε μια λιχουδιά από την πρώτη στήλη. Θέλετε τα πατατάκια, το παγωτό;... Με 10 λεπτά περπάτημα καίμε 25 θερμίδες. Για να κάψουμε τις 300, που μας δίνει μια μπάλα παγωτό, πόσα λεπτά περπάτημα χρειαζόμαστε; Για σκεφτείτε έναν τρόπο στην ομάδα σας, συζητήστε για να τον βρείτε. Ό,τι κάνετε και ό,τι τρόπο δοκιμάζετε γράψτε τον εδώ, στο φύλλο εργασίας. Χρειαζόμαστε στο τέλος έναν εκπρόσωπο από την κάθε ομάδα που θα μας ανακοινώσει τον τρόπο που σκέφτηκε η ομάδα του. Αυτός ο τελικός τρόπος θα βγει, αν συνθέσετε τις διαφορετικές ιδέες που έχετε. ...*
2. *Δημήτρης: Να κάνουμε πινακάκι;...*
3. *Δάσκαλος: Μάλιστα. Διαλέξατε στην ομάδα Δ′ το παγωτό, που δίνει 300 θερμίδες. Σε 10 λεπτά περπάτημα 25 θερμίδες. Μετά λέτε σε 20 λεπτά καίμε 50 θερμίδες. Σε 30 λεπτά καίμε 75 και ανεβαίνοντας έτσι φτάσατε να βρείτε ότι σε 120 λεπτά περπάτημα καίγονται οι 300 θερμίδες που μας δίνει το παγωτό... Παιδιά, για να δούμε την ομάδα Δ, τι έκανε; Ποιος θα μας τα παρουσιάσει; Ο Δημήτρης. Για πες μας Δημήτρη, τι κάνατε;...*
4. *Ο Δημήτρης παρουσιάζει τη λύση της ομάδας του και εγώ γράφω στον πίνακα ό,τι λέει. Οι υπόλοιπες ομάδες έχουν σταματήσει τη δουλειά τους και παρακολουθούν τον τρόπο επίλυσης της ομάδας Δ. Σταδιακά εμπλέκονται ενεργά....*
5. *Δημήτρης: 120 λεπτά... Μάριος Γ (ομάδα Γ): Δηλαδή 2 ώρες.*
6. *Εγώ: Με τα 80 λεπτά;...Φωτεινή-Βαρβάρα-Δημήτρης (διαμαρτύρονται έντονα): Με τα 75 λεπτά ποδήλατο! Άμα πούμε με τα 80 λεπτά ποδήλατο, πάμε στις 320 θερμίδες. Μια μπάλα παγωτού μας δίνει 300 θερμίδες.*
7. *Δημήτρης Ζ.: Βάλαμε το μισό, για να μας βγει αυτό που ψάχνουμε... Δημήτρης Μ.: Δηλαδή, είπαμε με τα 70 λεπτά ποδήλατο καίμε 280 θερμίδες. Στα 10 λεπτά ποδήλατο καίμε 40 θερμίδες, στο μισό, δηλαδή στα 5 λεπτά, θα καίμε 20 θερμίδες... 280+20=300 θερμίδες.*
8. *Δάσκαλος: Με τι ασχοληθήκατε εσείς, με τα πατατάκια; Γιατί τα σβήσατε; Για να τα πάρουμε, λοιπόν, πάλι από την αρχή. Και οι τρεις να σκέφτεστε και να λέτε, και ο Μάριος να γράφει στο χαρτί. Στα 10 λεπτά περπάτημα πόσες θερμίδες καίμε;*
9. *Μάριος Φ.: 25. Στα 20 λεπτά 50 θερμίδες. Στα 30 λεπτά 75 θερμίδες... Στα 60 λεπτά 150 θερμίδες... Το βρήκαμε, στις 150 θέλαμε να φτάσουμε, που έχουν τα πατατάκια...*
10. *Μάριος Γ.: Τώρα τι θα κάνουμε κύριε; Αν πάμε στα 40 λεπτά, καίμε 160 θερμίδες. Εμείς όμως θέλουμε 150.*
11. *Δάσκαλος: Για σκεφτείτε το λίγο...*
12. *Μάριος Γ.: Το βρήκα. Δε θ' ανεβούμε 10 λεπτά, αλλά 5. Στα 10 λεπτά καίμε 40 θερμίδες, άρα στα 5 λεπτά καίμε το μισό, 20 θερμίδες...*
13. *Μάριος Γ.: Ένας από αυτούς τους 2 μισούς και ένας από τους άλλους 2 μισούς και μένει και μισός. (Με ενθουσιασμό). Δύο ολόκληρους και έναν μισό... Δυόμισι λεπτά.*

14. *Μάριος Γ.: Στα 35 λεπτά ποδήλατο 140 θερμίδες. Στα δυόμισι λεπτά, πώς να το γράψω κύριε; (Του πρότεινα το συμβολισμό 2 ½). Στα 2 ½ λεπτά 10 θερμίδες. Άρα στα 37 ½ λεπτά ποδήλατο 150 θερμίδες.*
15. *(Ο δάσκαλος, όσο εγώ είχα εμπλακεί στην εργασία της ομάδας Γ, εκείνος ταυτόχρονα ασχολούνταν με την υποστήριξη της ομάδας Α, και έφτασαν στο ίδιο πρόβλημα, που το επεξεργάστηκαν όμως με διαφορετικό τρόπο, με στοιχεία αναγωγής στη μονάδα).*
16. *Δάσκαλος: Αφού στα 10′ καίμε 40 θερμίδες, στα μισά, δηλαδή στα 5 λεπτά, θα καίμε το μισό, δηλαδή 20. Έχουμε, λοιπόν, στα 30 λεπτά 120 θερμίδες και στα 35 λεπτά 120+20=140 θερμίδες...*
17. *Δάσκαλος: Για σκεφτείτε, στα 10 λεπτά καίμε 40 θερμίδες, στο 1 λεπτό πόσες θερμίδες καίμε; Τι θα κάνουμε;... Ωραία, σε 1 λεπτό, λοιπόν, καίμε 4 θερμίδες, στα 2 λεπτά;...*
18. *Δάσκαλος: Για να δούμε, τώρα, για το πατινάζ. Πες εσύ, Βασίλη.*
19. *Βασίλης: Στα 10 λεπτά πατινάζ 50 θερμίδες, στα 20 λεπτά πατινάζ 100 θερμίδες, στα 30 λεπτά πατινάζ 150 θερμίδες. Ωραία, φτάσαμε στο 150. Αυτό ήταν εύκολο...*
20. *(Η ομάδα Β′, υιοθετώντας τη στρατηγική για την ποδηλασία, ότι, αφού στα 10 λεπτά καίμε 40 θερμίδες, στο 1 λεπτό καίμε 40:10=4 θερμίδες, υπολόγισε μόνη της, χωρίς βοήθεια, ότι στα 8 λεπτά καίμε 8Χ4=32 θερμίδες και συνεχίζοντας από εκεί που είχε φτάσει, ότι στα 30 λεπτά καίμε 120 θερμίδες, προσέθεσε 8 λεπτά και κατέληξε στο ότι στα 38 λεπτά καίμε 120+32=152 θερμίδες. Αυτό έγραψε και στον πίνακα του φύλλου, ικανοποιημένη που είχε πλησιάσει στο 150, χωρίς να επιμείνει να βρει ακριβώς 150 θερμίδες).*
21. *Από τις 4 ομάδες, η Δ ομάδα συγκριτικά παρουσίασε τη μεγαλύτερη νοητική αυτονομία, δε ζητούσε βοήθεια και καλούσε τον δάσκαλο ή εμένα συνήθως μόνο όταν είχε φτάσει σε κάποια αποτελέσματα που ήθελε να ανακοινώσει.*
22. *Δάσκαλος: Σε πόσο χρόνο καίμε, λοιπόν, τις 55;... (Αμηχανία)... Είπατε ότι στα 10 λεπτά καίμε 50 θερμίδες και βρήκατε ότι στο 1 λεπτό καίμε 5. Για ν' αυξήσουμε, λοιπόν, τις θερμίδες, από 50 να τις κάνουμε 55, να ανέβουμε 5 θερμίδες, πόσο θ' αυξήσουμε το χρόνο;... (Σιωπή)... Ένα λεπτό δε θ' ανέβουμε; Αφού για 5 θερμίδες περνά ένα λεπτό...*
23. *Δάσκαλος: Θέλετε να βρείτε στο συνδυασμό πατατάκια-σχοινάκι πόσος χρόνος χρειάζεται... Ωραία, για ανέβα και άλλο... Άμα προσθέσω 120+30 παίρνω 150 θερμίδες, που θέλουμε. Άρα και για το χρόνο, θα προσθέσω στα 20 λεπτά που καίμε 120 θερμίδες, άλλα 5 λεπτά για τις 30 θερμίδες και θα βρω 25 λεπτά...*
24. *Δάσκαλος: Τις 10, λοιπόν, θα τις καίμε στα μισά λεπτά. Πόσο είναι το μισό του 2,5;... (Σιωπή)... Για σχεδιάστε στο φύλλο σας 2,5 λεπτά με κύκλους. Ας υποθέσουμε ότι ένας κύκλος είναι ο κύκλος που κάνει ο δείκτης των δευτερολέπτων στο ρολόι, για να μετρήσει ένα λεπτό. Πόσους κύκλους θα χρειαστούμε;...*

25. *Δάσκαλος: Τι δείχνουν τα μουντζουρωμένα κομμάτια που βρήκατε; Για μαζέψτε τα λίγο! Πόσο είναι τελικά το μισό του 2,5;... (Σιωπή-αμηχανία)... (Τότε παίρνει ένα λευκό φύλλο χαρτί, κόβει τρεις κυκλικούς δίσκους και εκτελεί την προηγούμενη διαδικασία από την αρχή, κόβοντας αυτή τη φορά τα κομμάτια)...*
26. *Δάσκαλος: Σκεφτείτε λίγο τώρα, στα 10 λεπτά τρέξιμο 80 θερμίδες, στο 1 λεπτό; Ξέρουμε τα πολλά και ζητάμε το 1. Τι κάνουμε;...*
27. *(Στην επόμενη φάση θεωρήσαμε καλό με τον δάσκαλο, αφού και ο χρόνος κόντευε να εξαντληθεί, αλλά και οι μαθητές είχαν αρχίσει να κουράζονται, να κάνουμε μια ανακεφαλαίωση στον πίνακα.)...*
28. *Δάσκαλος: Για ακούστε, παιδιά! Τελειώστε ό,τι κάνετε και προσέξτε στον πίνακα, για να συζητήσουμε όλοι μαζί...*
29. *Δάσκαλος: Αν κόβουμε τα 10 λεπτά συνεχώς σε μικρότερα κομμάτια, ποιο θα είναι το μικρότερο κομμάτι που μπορούμε να φτάσουμε;*
30. *Μάριος Γ.: Το ένα λεπτό!*
31. *Δάσκαλος: Μάλιστα! Το ένα λεπτό. Ας πάρουμε το προηγούμενο παράδειγμα, τα πατατάκια με την ποδηλασία, και αντί να βρούμε το μισό των 10 λεπτών και μετά το μισό του μισού, να βρούμε το 1 λεπτό. Τώρα αφού ξέρουμε ότι στα 10 λεπτά καίμε 40 θερμίδες, στο 1 λεπτό πόσες καίμε; Γνωρίζουμε τα πολλά, τα 10, και ζητάμε το 1...*
32. *Εγώ: Βλέπουμε, παιδιά, ότι ένας άλλος τρόπος είναι να ψάχνω να βρω πρώτα στο 1 λεπτό πόσες θερμίδες καίμε, στη μία μονάδα, και μετά στα πολλά. Βέβαια εδώ, σ' αυτά τα προβλήματα, θα μπορούσαμε αντίστροφα να ψάξουμε να βρούμε τη 1 θερμίδα σε πόσο χρόνο την καίμε... Δάσκαλος: Το κάνανε για λίγο και αυτό, στην ομάδα Γ, κόβοντας το λεπτό σε δευτερόλεπτα. Αφού είπαμε ότι σε 1 λεπτό 4 θερμίδες, για να κάψουμε 1 θερμίδα πόσο χρόνο χρειαζόμαστε;... Μάριος Γ.: 15 δευτερόλεπτα.*
33. *Δάσκαλος: Πώς το βρήκες;*
34. *Μάριος Γ.: Αφού ξέρω ότι 1 λεπτό έχει 60 δευτερόλεπτα, διαίρεσα το 60 με το 4.*

Ανάλυση

Θεματική κατηγορία: «Ο Δάσκαλος»

Οι A. Hargreaves και M. Fullan (1995, σ. 38) αναφέρουν: «Για να κατανοήσουμε την εξέλιξη των εκπαιδευτικών, πρέπει να κατανοήσουμε όχι μόνο τις γνώσεις και τις δεξιότητες που πρέπει να αποκτήσουν οι εκπαιδευτικοί, αλλά και την προσωπικότητα του εκπαιδευτικού». Οι I. Goodson και R. Walker (1990) προτείνουν να αρχίσουμε εξετάζοντας το έργο του εκπαιδευτικού στο πλαίσιο της εξωσχολικής ζωής του. Εκεί που ο Goodson και ο Thiessen (1989) διαχώρισαν την εργασία στην τάξη από την εξωσχολική ζωή, ο Huberman (1989) έντεχνα τις ενώνει και σε έρευνα εξετάζει την επίδραση του κύκλου ζωής του εκπαιδευτικού στον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζει τη διδασκαλία. Τέλος, οι R. Butt και

D. Townsend (1990) παρουσιάζουν τις πρακτικές επιπτώσεις της καταγραφής της εξωσχολικής ζωής στην κατανόηση της πρακτικής του εκπαιδευτικού, ώστε να δρομολογηθούν διαδικασίες εξέλιξης για αλλαγές της.

Έξω από την τάξη: Ο δάσκαλος Θ.Κ., με εμπειρία 19 ετών, είναι δάσκαλος χωρίς ανασφάλειες, ανοιχτός σε οτιδήποτε παιδαγωγικά καινοτόμο. Επιπλέον, χαρακτηριστικά του είναι η επαγγελματική μετριοπάθεια, η εργατικότητα και η εσωτερική ευγένεια. Από εξωσχολικές επαφές διαπίστωσα ότι είχε συγκροτημένες απόψεις για το εκπαιδευτικό γίγνεσθαι. Παρακολούθησε «Πρόγραμμα Εξομοίωσης», όπου ωστόσο δε διδάχτηκε Διδακτική Μαθηματικών.

Μέσα στην τάξη: Η σχέση μεταξύ μας ήταν βαθιά συναδελφική, αμοιβαίου σεβασμού και αλληλοεκτίμησης. Η συνεργασία μας άψογη. Με βοήθησε να αισθανθώ ισότιμο μέλος της κοινότητας της τάξης. Οι διδακτικοί μας ρόλοι αναπτύσσονταν παράλληλα, όμως δεν προσπάθησε να παραγκωνίσει ο ένας τον άλλο. Η κοινή μας δράση μοιάζει με αυτή που περιγράφεται σε δύο ξεχωριστές έρευνες (Oberg & Underwood, 1989· Louden, 1989): Μια πορεία αυτοανάπτυξης και κατανόησης μέσω της συνεργασίας, που βοηθά στον αναστοχασμό επί της εκπαιδευτικής πρακτικής μας.

Η διδακτική πρακτική του δασκάλου

Στρατηγικές διδασκαλίας - Στάσεις και αντιλήψεις - Γνώσεις και δεξιότητες - Συμπεριφορά - Επικοινωνία και αλληλεπιδράσεις με μαθητές (Βλ. προηγουμένως, αριθ. αποσπάσματα Περιγραφής).

Καθοδηγητικός Ρόλος: Π.(1): Οι μαθητές αυτής της τάξης δεν έχουν εξοικειωθεί με την ομαδική εργασία και τον ενδοομαδικό προγραμματισμό. Στο ερωτηματολόγιο μαθητών, ένας μαθητής δήλωσε ότι δεν είχε εργαστεί ποτέ ξανά ομαδικά στα μαθηματικά. Γι' αυτό ο δάσκαλος παρεμβαίνει, για να συντονίσει το έργο των μαθητών στις ομάδες. Π.(17): Ο δάσκαλος καθοδηγεί τη λύση των μαθητών σε αναγωγή στη μονάδα. Η διαδικασία, όπως ξεδιπλώνεται, έχει ελάχιστη μαθησιακή αξία για τους μαθητές, αφού ο δάσκαλος τους καθοδηγεί με ερωτήσεις στον τρόπο σκέψης του και εκείνοι συμμετέχουν παθητικά, υπολογίζοντας ενδιάμεσα αποτελέσματα. Δεν κατανοούν το συνολικό σχέδιο λύσης, αφού δεν τους δόθηκε η ευκαιρία για να το επινοήσουν.

Έμφαση στο αποτέλεσμα: Π.(22): Συχνά εμείς οι δάσκαλοι, όταν οι μαθητές δυσκολεύονται να απαντήσουν, επαναλαμβάνουμε την αρχική μας εξήγηση ή αλλάζουμε την ερώτηση σε πιο εύκολη. Δεν κατανοούμε ότι η συλλογιστική μας δεν έχει νόημα για τους μαθητές. Έτσι, στο τέλος κουραζόμαστε, πιεσμένοι από έλλειψη χρόνου και δίνουμε εμείς την απάντηση στην ερώτησή μας. Στη βιβλιογραφία η Regine (1986) και ο Brousseau (1990) αναφέρουν την έννοια "διδακτικό συμβόλαιο". Το διδακτικό συμβόλαιο είναι το σύνολο των κανόνων που καθορίζουν έμμεσα αυτό που θα διαχειρίζεται κάθε εταίρος-μέλος της διδακτικής σχέσης, για το οποίο θα είναι υπεύθυνος ο ένας απέναντι στον άλλο. Ο δάσκαλος επιθυμεί οι μαθητές του να επιτύχουν. Τείνει να διευκολύνει την πορεία προς την επιτυχία με τρόπους που επιφέρουν ρήξεις του διδακτικού συμβολαίου εκ μέρους του διδάσκοντος στο μέτρο που το συμβόλαιο απαιτεί από τον διδάσκοντα να οδηγήσει τους μαθητές στην κατοχή αυτών των γνώσεων, που προσπαθεί να αποφευχθούν. Είναι το αποτέλεσμα Topaze, από ομώνυμο έργο. Δεν τελειώνει την προσπάθεια ο μαθητής, δε φτάνει σε επίπεδο κατανόησης να πραγματοποιήσει το μαθησιακό στόχο. Π.(23): Ο δάσκαλος θέτει αυτοσκοπό τη λύση του προβλήματος και χαράσσοντας δική του στρατηγική λύσης προσπαθεί με ερωτήσεις σε επιμέρους πτυχές να εμπλακούν οι μαθητές στη διαδικασία. Τον ενδιαφέρει η λύση και λιγότερο η διαδικασία λύσης. Η Ιθάκη και όχι το ταξίδι για την Ιθάκη. Εδώ είναι που η σύγχρονη Διδακτική διαφωνεί, αφού δέχεται ότι πρέπει να μας ενδιαφέρει κυρίως η διαδικασία και όχι το αποτέλεσμα. Η Κολέζα (2000) αναφέρει ότι πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη διαδικασία επανα-κατασκευής μαθηματικών εννοιών. Η Μπούφη (1995) γράφει ότι σκοπός της δασκάλας δεν είναι τα παιδιά να μιμηθούν λύσεις που συχνά δεν έχουν νόημα για τα ίδια, αλλά να τους προσφέρει ευκαιρίες να τις κατασκευάζουν και ότι συχνά το ενδιαφέρον των μαθητών εστιάζεται στα αποτελέσματα της εργασίας τους παρά στις διαδικασίες επίλυσης. Προσθέτει ότι από τις αντιλήψεις των δασκάλων διαμορφώνονται παρόμοιες αντιλήψεις και στους μαθητές. Χαρακτηριστική στο απόσπασμα η αλλαγή προσώπου που χρησιμοποιεί ο δάσκαλος. Ενώ ξεκινά με 2ο πληθυντικό («θέλετε να βρείτε...») καταλήγει σε 1ο ενικό («και θα βρω»). Το «και θα βρω» θα το χαρακτηρίζαμε *ενικό–πληθυντικό*, αναφέρεται και στον άγνωστο μαθητή. Λέμε:«για να λύσω την εξίσωση, θα πάρω...». Όχι μόνο εγώ, αλλά και εσύ. Ερμηνεύεται από την επιστημολογία και σχετικές πεποιθήσεις για την καθολικότητα των «αντικειμενικών αληθειών» των μαθηματικών, που υπερβαίνουν τα εκάστοτε υποκείμενα (Rotman, 1993· Triadafillidis, 1998). Π.(26) & Π.(31): Πάγια τακτική πολλών δασκάλων είναι η χρήση μηχανιστικών τρόπων επίλυσης προβλημάτων, η εύρεση της λέξης-κλειδιού, η αποστήθιση κανόνων, η παγίωση μαθηματικών νορμών των οποίων η γενίκευση οδηγεί σε παρανοήσεις. Οι μαθητές έχουν όμοια συνηθίσει σε έτοιμες συνταγές και αναμένουν από τον δάσκαλο παρόμοια τακτική. Δάσκαλοι και μαθητές δύσκολα μπορούν να τροποποιήσουν τη μαθηματική τους συμπεριφορά.

Η αντιμετώπιση του λάθους: Π.(8-9): Οι μαθητές της ομάδας Γ έκαναν λάθος στα δεδομένα στα οποία εφάρμοσαν τη σωστή στρατηγική τους. Ο δάσκαλος, αντιδρώντας σωστά, αντί να διορθώσει το λάθος, τους παρακινεί να ξετυλίξουν το κουβάρι από την αρχή, ώστε φτάνοντας σε γνωστική σύγκρουση να βρουν μόνοι τους το λάθος τους. Π.(10-11): Ένας μαθητής φτάνει σε αδιέξοδο και ζητά βοήθεια. Ο δάσκαλος, αποφεύγοντας να δώσει έτοιμη λύση, κοινοποιεί στην ομάδα τον προβληματισμό του μαθητή και παροτρύνει τους μαθητές να το σκεφτούν ακόμα. Μετά ο ίδιος μαθητής που ζήτησε βοήθεια βρήκε μόνος τρόπο να προχωρήσει επιδεικνύοντας θέληση και παράγοντας προηγμένο τρόπο λύσης. Αν είχε δοθεί έτοιμη η απάντηση στην αρχή, όπως συνήθως υπό πίεση χρόνου, θα είχε χαθεί μια σημαντική μαθησιακή ευκαιρία. Π.(16): Ο Δημήτρης απάντησε λανθασμένα σε ερώτηση του δασκάλου. Αντί ο δάσκαλος να επενδύσει στο λάθος (Καφούση, 1994), όπως πριν, δίνει άμεσα τη σωστή απάντηση.

Παρότρυνση σε διάλογο: Π.(3-4): Ο δάσκαλος ανακεφαλαίωσε και ο εκπρόσωπος της ομάδας Δ παρουσίασε τη στρατηγική της ομάδας για να τεθεί σε συζήτηση και να παρακινηθούν οι άλλες ομάδες να την υιοθετήσουν ή να αναπτύξουν δική τους. Η μάθηση είναι πολιτιστική μύηση σε εδραιωμένες πρακτικές της ομάδας στην οποία ανήκουμε, σύμφωνα με την Κοινωνικοπολιτιστική Προσέγγιση (Vygotsky). Π.(27): Ο δάσκαλος και εγώ ανακεφαλαιώσαμε στον πίνακα. Στόχος ήταν σε όλες τις ομάδες να κοινοποιηθούν οι τρόποι σκέψης κάποιας ομάδας, ώστε να οικειοποιηθούν οι μαθητές όσους τους εξυπηρετούν. Όμως και αυτοί που άκουγαν το δικό τους τρόπο καλλιεργούσαν τη μεταγνώση τους. Επίσης, έγινε προσπάθεια να περάσουμε σε πιο αφαιρετικά στάδια, κάθετης μαθηματικοποίησης και ομαδοποίησης-γενίκευσης των διάφορων τυχαίων πρακτικών σε γενικούς κανόνες. Π.(28): Ο δάσκαλος παρακινεί τους μαθητές να εμπλακούν σε μαθηματικό διάλογο.

Εξατομικευμένη διδασκαλία: Π.(18-19): Ήταν σωστές οι επιλογές από τον δάσκαλο και του απλού προβλήματος πατινάζ-πατατάκια και του συγκεκριμένου μαθητή για να το λύσει μεγαλόφωνα. Η ομάδα Α, που στη «μαθηματική παρουσία» της στην τάξη ήταν συγκριτικά αδύναμη, χρειαζόταν εύκολες προβληματικές καταστάσεις με ακέραια πολλαπλάσια, για να τις λύσει με επιτυχία και να τονωθεί η αυτοπεποίθηση των μελών της ομάδας, κυρίως του Βασίλη, που αντιμετώπισε δυσκολίες και πειράγματα.

Χρήση αναπαραστάσεων-χειραπτικού υλικού: Π.(24): Ο δάσκαλος προσπαθεί να νοηματοδοτήσει τη σχέση λεπτού-κύκλου, για να διευκολύνει την υιοθέτηση των κύκλων ως μοντέλου αναπαράστασης. Λαμβάνοντας υπόψη ότι ένας κύκλος είναι η κυκλική τροχιά που διαγράφει η άκρη του δείκτη των δευτερολέπτων σε ένα λεπτό, ο μαθητής κατανοεί την επιλογή του κύκλου ως μοντέλου του λεπτού. Π.(25): Αν και οι μαθητές σχεδιαστικά χώρισαν τους 2,5 κύκλους στα μισά τους και τα σκιαγράφησαν, όταν ζητήθηκε να τα συνθέσουν, ώστε να εκφράσουν αριθμητικά το μισό του 2,5, έμειναν άπραγοι. Τότε ανατροφοδοτώντας τη διδακτική στρατηγική του ο δάσκαλος τροποποίησε την τακτική του. Όταν, αντί για σχέδιο, η διαδικασία έγινε με κυκλικούς δίσκους που κόψαμε, οι μαθητές κατάφεραν να συνθέσουν τα κομμάτια. Όσο πιο χειροπιαστό είναι το μοντέλο αναπαράστασης, τόσο πιο οικείο είναι για τους μαθητές, ώστε να εκτελέσουν νοητικές πράξεις (στάδιο συγκεκριμένων νοητικών ενεργειών).

Ανάδυση στρατηγικών: Π.(15): Αναδείχθηκε μια θέση της σύγχρονης αντίληψης στη Διδακτική των μαθηματικών. Ένα πρόβλημα λύνεται με πολλούς τρόπους και είναι μαθησιακά ωφέλιμο για τους μαθητές να μην επιμένουν μόνο στον ένα. Για να συμβεί αυτό, σε μια τάξη που έχει εθιστεί να αρκείται στον ένα τρόπο λύσης σημαντικό είναι ο δάσκαλος να παρακινεί τους μαθητές να συνεχίζουν την αναζήτηση και άλλων τρόπων, δίνοντας ο ίδιος το παράδειγμα. Π.(29-31): Ο δάσκαλος αξιοποιεί τη στρατηγική που αναδύθηκε στην ανακεφαλαίωση. Με βάση τη διαρκή διχοτόμηση εκμαιεύει τη στρατηγική Αναγωγής στη Μονάδα. Π.(33-34): Ο δάσκαλος ρωτά τον μαθητή πώς το βρήκε δίνοντάς του την ευκαιρία να αναπτύξει τη στρατηγική του. Έτσι ωφελείται αναστοχαζόμενος και ο ίδιος ο μαθητής μεταγνωστικά και οι υπόλοιποι ακούγοντάς τον. Αρκετοί δάσκαλοι, παραδοσιακά, αρκούνται στη σωστή απάντηση κάποιου μαθητή και δεν επιμένουν για επεξηγήσεις, ώστε να αναδειχτεί η στρατηγική λύσης.

Ερωτηματολόγιο δασκάλου

Στο τέλος ο δάσκαλος συμπλήρωσε ένα ερωτηματολόγιο. Περιγράφει τη διδακτική εμπειρία ως διαφορετική προσέγγιση των μαθηματικών. Στα θετικά σημεία συγκαταλέγει τη διαθεματική διάσταση, όπου τα μαθηματικά συνδέθηκαν με άλλα μαθήματα και με την καθημερινή ζωή (ρεαλιστικά μαθηματικά). Επίσης, τονίζει ότι το μάθημα έγινε ευχάριστο με τις διάφορες δραστηριότητες. Αρνητικά σημεία δεν εντόπισε. Αναφέρει κάποιες δυσκολίες που συνδέονται με την όλη προσέγγιση. Απαιτούνται από τον εκπαιδευτικό προετοιμασία και σύνταξη φύλλων εργασίας (τέτοια καινοτόμα προγράμματα μπορεί να συναντήσουν αντιστάσεις από μερίδα εκπαιδευτικών, αφού θα αυξήσουν το φόρτο εργασίας (Goodson & Walker, 1990). Αναφερόμενος στην τάξη, διαπιστώνει μια αρχική δυσκολία στο να μπορέσουν να δουλέψουν ομαδικά οι μαθητές. Η πρόβλεψη της χρονικής διάρκειας υλοποίησης είναι επίσης δύσκολη. Στην ερώτηση, τι αποκόμισε, απαντά ότι ήταν γι' αυτόν μια εμπειρία διαφορετική, όπου η τάξη εργαζόμενη ομαδοσυνεργατικά έφτασε στη σωστή λύση προβλημάτων. Το ότι ανέφερε ως επίτευξη του στόχου τη σωστή λύση προβλημάτων μαρτυρά αντιλήψεις υπέρ της έμφασης στο αποτέλεσμα, που ήδη τονίσαμε. Στην ερώτηση αν διαπίστωσε αλλαγή στάσης των μαθητών του στα μαθηματικά, σε σχέση με το τυπικό μάθημα των μαθηματικών πριν, απαντά πως στη διαθεματική προσέγγιση, αυξήθηκε ο βαθμός συμμετοχής των μαθητών σε μαθηματικές δραστηριότητες.

Θεματική κατηγορία: «Οι μαθητές»

<u>Ανάδυση της ανάγκης χρήσης μαθηματικών πρακτικών:</u> <u>Π.(2)</u>: Από τους ίδιους τους μαθητές αναδύεται η ανάγκη οργάνωσης των δεδομένων τους με κάποιο μαθηματικό τρόπο, όπως η κατασκευή πίνακα διπλής εισόδου <u>Π.(14)</u>: Ο μαθητής, αν και δεν έχει εξοικειωθεί με τη χρήση αριθμητικών συμβόλων για τους ρητούς αριθμούς (αφού δεν έχει ακόμη διδαχτεί ούτε δεκαδικούς ούτε κλάσματα), αισθάνεται μόνος του την ανάγκη να κωδικοποιήσει τη λέξη «δυόμισι» σε μαθηματικό σύμβολο και ζητά βοήθεια, εκφράζοντας την επιθυμία του να χρησιμοποιήσει τη μαθηματική γλώσσα.

<u>Ύπαρξη Μαθηματικού Διαλόγου:</u> <u>Π.(4)</u>: Τα παιδιά των υπόλοιπων ομάδων έχουν σταματήσει τη δουλειά τους και παρακολουθούν τον τρόπο επίλυσης της ομάδας δ'. Σταδιακά από παθητικοί θεατές αρχίζουν να εμπλέκονται ενεργά. Ο Μάριος, από την ομάδα γ', παρεμβαίνει και το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε ο Δημήτρης, τα 120 λεπτά, το μετατρέπει σε 2 ώρες. Ο ρόλος μας, των δασκάλων, έχει περιοριστεί στο να υποστηρίζουμε την παρουσίαση των τρόπων επίλυσης των ομάδων (διευκολυντές μάθησης). Πρωταγωνιστές αναδεικνύονται οι ίδιοι οι

μαθητές, που, έστω και για σύντομο χρονικό διάστημα, εμπλέκονται σε ενεργό μαθηματικό διάλογο προσπαθώντας να οικειοποιηθούν ο ένας τη λύση του άλλου, βρίσκοντας την «κοινή γνώση», τα κοινά νοήματα (shared meanings). Π.(6): Προσποιούμενος τον ανήξερο ανεβαίνω κατά 10 λεπτά, φτάνοντας στα 80. Τότε οι μαθητές διαμαρτύρονται έντονα και με διορθώνουν. Είναι εντυπωσιακός ο τρόπος που υπερασπίζονται τη λύση τους, επιχειρηματολογούν και ξεδιπλώνουν τον τρόπο σκέψης τους. Όταν οι μαθητές προβάλλουν ένα αντεπιχείρημα (counter-example), εμπλέκονται ακόμη πιο ενεργά και με περισσότερο πάθος στην υποστήριξη της θέσης τους από ό,τι απαντώντας σε μια ακαδημαϊκή ερώτηση του δασκάλου τους. Π.(7): Ο Δημήτρης Μ. καταλαβαίνει ότι η επεξήγηση του συμμαθητή του από την ίδια ομάδα δεν είναι πλήρης και αυθόρμητα, οικειοθελώς, αναλαμβάνει την υποχρέωση να τη συμπληρώσει.

Πλουραλισμός απόψεων και λύσεων: Π.(5): Κάθε μαθητής εκφράζει ελεύθερα το αριθμητικό αποτέλεσμα στις μετρικές μονάδες χρόνου που προτιμά, 120 λεπτά ή 2 ώρες. Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές ότι στα μαθηματικά και γενικά στις επιστήμες δεν υπάρχει πάντα μόνο μια αποδεκτή λύση ούτε ένας τρόπος έκφρασης, αλλά διαλέγουμε κάθε φορά το σύστημα αναφοράς που μας ταιριάζει. Π.(20): Η ομάδα β′ υιοθέτησε τη συλλογιστική τής Αναγωγής στη Μονάδα, υπολόγισε μόνη της, χωρίς βοήθεια, ότι στα 8 λεπτά καίμε 32 θερμίδες και κατέληξε ότι στα 38 λεπτά καίμε 152 θερμίδες. Έτσι, από την ομάδα β′ αναδύθηκε ένας άλλος τρόπος συλλογιστικής και λύσης, διαφορετικός από αυτόν της ομάδας γ′, και ενισχύθηκε στην τάξη η άποψη ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι για να λύσεις ένα πρόβλημα. Το ότι η ομάδα β′ δεν επέμεινε να φτάσει ακριβώς στο 150, αλλά έγραψε στον πίνακα 152, μαρτυρά ότι οι μαθητές υιοθέτησαν τους υπολογισμούς κατά προσέγγιση. Π.(32): Ο Μάριος Γ. ασχολήθηκε με ένα παράδειγμα αναγωγής στη μονάδα, όπου η μονάδα δεν είναι το ένα λεπτό, όπως πριν, αλλά η μία θερμίδα. Αποφεύγοντας τους κλασματικούς αριθμούς χρησιμοποιεί εύστοχα ακέραιους, μετατρέποντας το λεπτό σε δευτερόλεπτα. Με το δεδομένο ότι σε 1 λεπτό καίμε 4 θερμίδες, υπολογίζει ότι, για να κάψουμε 1 θερμίδα, χρειαζόμαστε 15 δευτερόλεπτα.

Κατασκευή άτυπων μαθηματικών γνώσεων: Π.(12): Ο Μάριος, χωρίς να γνωρίζει τυπικά «αναλογίες» στα Μαθηματικά, με ξαφνική έμπνευση και ενορατική σκέψη, διαισθάνεται την αναλογική σχέση ότι, για να κάψουμε τις μισές θερμίδες, θα χρειαστούμε το μισό χρόνο σωματικής άσκησης. Π.(13): Ο μαθητής με τη βοήθεια του χειραπτικού υλικού έχει ήδη βρει με γεωμετρικό τρόπο το μισό του 5 και σε ένα επόμενο αφαιρετικό στάδιο, αποπλαισίωσης, αποσυνδέει τη σκέψη του από τους ορατούς κυκλικούς δίσκους και περνά στην πιο αφηρημένη έννοια των λεπτών. Π.(14): Με αυθόρμητο και διαισθητικό τρόπο ο μαθητής, σκεπτόμενος «τριάντα πέντε και δυόμισι», έκανε μόνος του την πρόσθεση και βρήκε τριάντα εφτάμισι, χωρίς να γνωρίζει τις τεχνικές πρόσθεσης ακεραίου με δεκαδικό ή με μεικτό αριθμό. Διαπιστώνουμε πόσο πιο εύκολες είναι συχνά οι άτυπες νοερές *πράξεις, με το μυαλό, από τις πιο τυπικές πράξεις, με χαρτί και με μολύβι, και πόσο απαραίτητο είναι το να καταλήξουμε με φυσικότητα και αβίαστο πέρασμα από τις πρώτες στις δεύτερες.*

Αυτονόμηση των μαθητών: Π.(10-12): Στην αρχή ο Μάριος Γ., όταν φτάνει σε αδιέξοδο στο συλλογισμό του, ζητά τη βοήθεια του δασκάλου. Όταν όμως ο δάσκαλος, πολύ εύστοχα, δεν του δίνει έτοιμη λύση, είναι αξιοσημείωτο πως δεν τα παρατά, αλλά μόνος του (χωρίς βοήθεια) βρίσκει τον τρόπο να προχωρήσει παρακάτω, δείχνοντας πόσο αφοσιωμένος είναι σ' αυτό που κάνει, με εσωτερικό κίνητρο την εύρεση της τελικής λύσης. Π.(21): Θα μπορούσαμε να διακρίνουμε τυπολογίες των ομάδων των μαθητών ως προς τη συμπεριφορά και τη σχέση εξάρτησής τους από τον δάσκαλο, κατά τη διάρκεια της εργασίας τους. Από όλες τις ομάδες, η δ' ομάδα συγκριτικά παρουσίασε τη μεγαλύτερη νοητική αυτονομία.

Ερωτηματολόγιο Μαθητών

Γενικά, οι μαθητές τοποθετήθηκαν θετικά για την κοινή εμπειρία που ζήσαμε μαζί αυτές τις 4 εβδομάδες, στο πλαίσιο της Ευέλικτης Ζώνης. Στην πρώτη ερώτηση όλοι απάντησαν ότι τους άρεσε η ενότητα «Θέματα Διατροφής» και, απαντώντας στο γιατί, οι περισσότεροι έγραψαν γιατί τους φάνηκε σαν παιχνίδι (όχι σαν παραδοσιακό μάθημα) ή γιατί έκαναν μαθηματικά και ζωγραφική και πέρασαν ωραία. Στη δεύτερη ερώτηση: «Τι θυμούνται πιο πολύ από την ενότητα που κάναμε», άλλοι απάντησαν τον πίνακα με τις θερμίδες και τα λεπτά, άλλοι το ραβδόγραμμα με τις κολόνες και ένας απάντησε ότι θυμάται πιο πολύ αυτά που έκανε την τελευταία ημέρα, δηλαδή την επεξεργασία των ημερολογίων, τη ζωγραφική και τα ερωτηματολόγια. Στη συζήτηση μια μαθήτρια απάντησε ότι θυμάται πιο πολύ το δικό τους πρόβλημα που φτιάξανε. Στην τρίτη ερώτηση: «Σε τι διέφερε από τ' άλλα μαθήματα», όλοι σχεδόν απάντησαν γραπτά ότι διέφερε γιατί ήταν σαν παιχνίδι, εκτός από δυο, που απάντησαν ότι διέφερε γιατί αναφερόταν σε θέματα υγείας και διατροφής. Μια μαθήτρια στη συζήτηση απάντησε ότι διέφερε γιατί δούλευαν σε ομάδες. Στην τέταρτη ερώτηση, έπειτα από συζήτηση, οι μαθητές κατέληξαν ότι στην ενότητά μας ασχολήθηκαν με θέματα που σχετίζονται με τα εξής σχολικά μαθήματα: Γλώσσα, Μαθηματικά, Μελέτη Περιβάλλοντος, Φυσική, Χημεία, Τεχνικά. Έτσι, αναδύθηκε από τους ίδιους τους μαθητές η παραδοχή της διαθεματικής διάστασης της ενότητας με την οποία ασχοληθήκαμε. Στην τελευταία ερώτηση του ερωτηματολογίου τους, «αν θα ήθελαν να επαναλάβουμε μια παρόμοια δραστηριότητα και στο μέλλον», όλοι απάντησαν «ναι».

Συμπεράσματα - Προεκτάσεις

Αν δούμε το δίπολο «αναθεώρηση διδακτικής πρακτικής-δάσκαλοι» ως ανάλογο με το δίπολο «μάθηση νέας γνώσης-μαθητές», παρατηρούμε ότι οι αντιλήψεις των δασκάλων, σε μια κονστρουκτιβιστική θεώρηση, αποτελούν τις προυπάρχουσες δομές, όπου θα βασιστούν οι αναθεωρητές επιστήμονες για να τις φέρουν σε «γνωστική σύγκρουση», ώστε να θελήσουν οι ίδιοι οι δάσκαλοι να τροποποιήσουν τις στάσεις και τις πρακτικές τους στη μαθηματική εκπαίδευση. Η σύγκρουση όμως αυτή δεν μπορεί να γίνει μόνο σε θεωρητικό επίπεδο, αλλά κυρίως στην καθημερινή διδακτική πράξη στην τάξη. Το πλαίσιο διαθεματικών δραστηριοτήτων δίνει τέτοιες ευκαιρίες αλλαγής των παραδοσιακών αντιλήψεων-πρακτικών στο μάθημα των μαθηματικών.

Στην παρούσα έρευνα, κατά την υλοποίηση ενός διαθεματικού project από μία τάξη και τη συμμετοχική παρατήρηση της τάξης αυτής ως μελέτης περίπτωσης προέκυψαν συμπεράσματα για την «αλήθεια» της τάξης, των μαθητών και του δασκάλου. Κατά τη φάση της Ανάλυσης της θεματικής του δασκάλου, ομαδοποιήσαμε σε εννοιολογικές κατηγορίες τα συμπεράσματα που αναδύθηκαν: α) Ο παραδοσιακά γνώριμος καθοδηγητικός ρόλος του δασκάλου διατηρήθηκε, το ίδιο και η β) Έμφαση στο αποτέλεσμα και όχι στη διαδικασία. γ) Η αντιμετώπιση των λαθών των μαθητών από τον δάσκαλο, με μία μόνο εξαίρεση, είναι αισθητά βελτιωμένη σε σχέση με το παραδοσιακό πρότυπο. Ομοίως συχνή είναι εκ μέρους του δασκάλου η δ) Παρότρυνση των μαθητών σε μαθηματικό διάλογο. ε) Εξατομικευμένη διδασκαλία εφαρμόζεται από τον δάσκαλο, αφού το ευέλικτο πλαίσιο του ανοικτού διαθεματικού προβλήματος επιτρέπει την επιλογή κατάλληλων δραστηριοτήτων-πτυχών ανάλογα με το μαθησιακό επίπεδο των μαθητών. Ο δάσκαλος αντί να προχωρήσει σε αφαιρετικές δομές κάνει στ) Χρήση αναπαραστάσεων και εποπτικού και χειραπτικού υλικού για να υποστηρίξει μαθησιακά τους μαθητές. Διαπιστώνεται μια προσπάθεια διαρκούς ανατροφοδότησης της διδασκαλίας του από τις αντιδράσεις των μαθητών. Η διδασκαλία έχει δυναμική, δεν είναι στατικό, έτοιμο, προκαθορισμένο προϊόν. Όταν οι μαθητές δεν κατόρθωσαν σχεδιαστικά να βρουν το μισό των 2,5 λεπτών-κύκλων, τότε τους παρότρυνε να κατασκευάσουν και να κόψουν χάρτινους κυκλικούς δίσκους. Τέλος, έχουμε ζ) Ανάδυση στρατηγικών. Είδαμε πώς ο δάσκαλος, πατώντας στην αναδυόμενη από τους μαθητές στρατηγική συνεχούς διχοτόμησης, προσπαθεί να εκμαιεύσει τη στρατηγική της Αναγωγής στη Μονάδα. Αντί με Παραγωγή να λύσει ο ίδιος υπόδειγμα Αναγωγής στη Μονάδα και μετά να δώσει έτοιμο αλγόριθμο στους μαθητές, εκείνος, κατά τον Gravemejer (1998), οργανώνει και κατευθύνει τις άτυπες σποραδικές στρατηγικές των μαθητών μέσα από μια διαδικασία επανεπινόησης, ώστε να αναδυθεί η στρατηγική της Αναγωγής από τις λύσεις των παιδιών.

Από τα εμπειρικά δεδομένα διαπιστώνουμε, λοιπόν, μια δυναμική αλλαγής σε όλες, εκτός από τις δύο πρώτες, κατηγορίες-διδακτικές πρακτικές του δασκάλου. Η αλλαγή αυτή γίνεται ασυνείδητα, οφείλεται στην αλλαγή του όλου μαθησιακού-διδακτικού πλαισίου, στην επαφή με τον ερευνητή και με το νέο υλικό. Επίσης, κατά τη φάση της Ανάλυσης της θεματικής των μαθητών, ομαδοποιήσαμε σε εννοιολογικές κατηγορίες τα συμπεράσματα που αναδύθηκαν: α) Συχνά οι διάφορες μαθηματικές πρακτικές δεν επιβάλλονταν από τον δάσκαλο ή το σχολικό βιβλίο, όπως παραδοσιακά γίνεται, αλλά η ανάγκη χρήσης τους αναδυόταν μέσα από τη διερεύνηση των μαθηματικών προβλημάτων. Π.χ., αναδύθηκε η ανάγκη οργάνωσης σε πίνακα των δεδομένων ενός προβλήματος ή η ανάγκη της γραπτής κωδικοποίησης και έκφρασης ποσοτήτων με σύμβολα της μαθηματικής γλώσσας. β) Η ύπαρξη Μαθηματικού Διαλόγου: Παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές, συχνότερα από ό,τι στο παραδοσιακό μάθημα, εμπλέκονταν σε ενεργό μαθηματικό διάλογο προσπαθώντας να οικειοποιηθούν ο ένας τη λύση του άλλου, βρίσκοντας την «κοινή γνώση». Άλλοτε με επιχειρήματα προσπαθούσαν να υποστηρίξουν τη στρατηγική ενός συμμαθητή τους, άλλοτε με αντεπιχειρήματα προσπαθούσαν να την απορρίψουν και άλλοτε έδιναν διευκρινίσεις προσπαθώντας να δικαιολογήσουν και να συμπληρώσουν τη στρατηγική επίλυσης της ομάδας τους. γ) Ο πλουραλισμός απόψεων και εναλλακτικών τρόπων λύσης: Τόσο κατά την επίλυση των προβλημάτων, με την ανάδειξη και την αποδοχή από το σύνολο της τάξης εναλλακτικών τρόπων λύσης, όσο και κατά την απλή διαχείριση αριθμητικών ποσοτήτων με εναλλακτικές μαθηματικές εκφράσεις, π.χ. ως ακεραίους, ως κλασματικούς ή δεκαδικούς, αναδύθηκε το συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει πάντα μόνο μία αποδεκτή επιλογή, αλλά διαλέγουμε κάθε φορά το σύστημα αναφοράς που μας ταιριάζει. γ) Η κατασκευή άτυπων μαθηματικών γνώσεων: Χωρίς να έχουν διδαχτεί ακόμη οι μαθητές τούς δεκαδικούς και κλασματικούς αριθμούς, διαχειρίστηκαν με επιτυχία, στα προβλήματα που αντιμετώπισαν, διάφορες ποσότητες εκφρασμένες σε ρητούς αριθμούς, εκτελώντας πράξεις με άτυπο τρόπο, νοερά ή με τη βοήθεια χειραπτικού υλικού. Αυτές οι άτυπες νοητικές κατασκευές θα λειτουργήσουν αργότερα ως προϋπάρχουσες δομές, όπου θα στηριχτεί και θα οικοδομηθεί η τυπική διδασκαλία. δ) Η αυτονόμηση των μαθητών: Οι μαθητές αναλάμβαναν πρωτοβουλίες συχνότερα από ό,τι στο παραδοσιακό μάθημα και εμπλέκονταν μόνοι τους σε σύνθετες διαδικασίες λύσης, χωρίς να ζητούν συχνά τη βοήθεια των δασκάλων. Ο βαθμός αυτονομίας σκέψης διέφερε, φυσικά, από μαθητή σε μαθητή. Όμως, χωρίς το εξωτερικό κίνητρο βαθμών, όλοι οι μαθητές παρέμεναν αφοσιωμένοι στην επίλυση των προβλημάτων της ομάδας τους.

Για χρόνια οι επιστήμονες της Διδακτικής επισημαίνουν προτερήματα της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας. Οι Johnson & Johnson (1992) αναφέρουν πως 620 μελέτες δείχνουν ότι οι συνεργατικές μορφές διδασκαλίας συμβάλλουν στην επίδοση και στις διαπροσωπικές σχέσεις των μαθητών. Γεγονός είναι ότι τα παιδιά δεν έχουν μάθει να συνεργάζονται στα μαθηματικά, ενώ ανταγωνίζονται για τον έπαινο του δασκάλου. Όπως δήλωσαν οι μαθητές στην έρευνα, ήταν η πρώτη φορά που εργάστηκαν ομαδικά σε μαθηματικές δραστηριότητες. Ο Ματσαγγούρας (2002) αναφέρει: «Απόρροια των επιδιώξεων της διαθεματικότητας είναι ότι καθιερώνει μεθοδολογικές προσεγγίσεις συλλογικής-διερευνητικής φύσης».

Διαπιστώνουμε ότι ο δάσκαλος στη διαθεματική ενότητα «Θέματα Διατροφής» είχε την ευκαιρία να εργαστεί σε πιο ευέλικτο πλαίσιο, να συνεργαστεί με ένα συνάδελφό του αλληλεπιδρώντας-ανταλλάσσοντας εμπειρίες, να σχεδιάσει, να παραγάγει ο ίδιος το εκπαιδευτικό υλικό που θα χρησιμοποιήσει στη διδασκαλία, χωρίς να το πάρει έτοιμο εκ των άνωθεν, με τη μορφή Α.Π., βιβλίου δασκάλου-μαθητή και, τέλος, είχε την ευκαιρία να συζητήσει με μαθητές αναπτύσσοντας δημοκρατικές σχέσεις, χωρίς βαθμολογήσεις και απειλές, χωρίς ασφυκτικά χρονοδιαγράμματα. Διευρύνοντας το βαθμό αυτογνωσίας του, χωρίς θεωρητική ενημέρωση, άρχισε να αναρωτιέται και να εστιάζει σε θέματα που στην καθημερινή μαθησιακή ρουτίνα περνούν απαρατήρητα. Θέματα που ο ίδιος ανέφερε στο ερωτηματολόγιο ως θετικά σημεία στο εγχείρημά μας, δηλαδή ότι το μάθημα των μαθηματικών συνδέθηκε με την καθημερινή ζωή, έγινε με ποικιλία δραστηριοτήτων πιο ευχάριστο για τα παιδιά, ότι οι μαθητές εργάζονταν σε ομάδες, πρότειναν κάποιοι ένα τρόπο λύσης, και οι άλλοι στήριζαν ή κατέρριπταν την αρχική εικασία και ότι τα παιδιά συμμετείχαν με ενθουσιασμό. Με την προσέγγιση αυτή προβληματίζονταν όλοι. Η εμπλοκή όλων των μαθητών, όχι μόνο των «ικανών», και η ανταλλαγή μαθηματικών απόψεων, κατά το πρότυπο του διαλόγου που διεξάγεται στο έργο του Lakatos, “Proofs and Refutations”, είναι το ζητούμενο (Lampert, 1988) για τη διεξαγωγή «Μαθηματικού Διαλόγου». Σημαντικό είναι ότι τα παιδιά χωρίς να κάνουν μάθημα παραδοσιακά –επισημάναμε ότι η Ε.Ζ. δεν είναι μάθημα, χωρίς το εξωτερικό κίνητρο του βαθμού, στην Ε.Ζ. δεν χρησιμοποιούνται βαθμοί– έμειναν αφοσιωμένα στο σκοπό τους μέχρι το τέλος, με εσωτερική πειθαρχία. Όταν παρακολούθησα πριν τη διαθεματική προσέγγιση την ίδια τάξη στο μάθημα των μαθηματικών μιας ημέρας, μερικά παιδιά με την προκατάληψη «τώρα έχουμε μαθηματικά» δε συμμετείχαν με τον ίδιο ενθουσιασμό, αλλά και ο δάσκαλος ήταν σφιγμένος και οι διατυπώσεις φορμαλιστικές. Ανοικτού τύπου προβλήματα, όπως αυτά της ενότητάς μας, σπάνια συναντά κανείς σε σχολικά βιβλία.

Το πλαίσιο διαθεματικών δραστηριοτήτων είναι ένα κατάλληλο πλαίσιο που, μέσα από την επαφή με νέο, πρωτογενές υλικό, δίνει ευκαιρίες για αλλαγή των παραδοσιακών αντιλήψεων και πρακτικών, των διδακτικών για τους δασκάλους και των μαθησιακών για τους μαθητές στο μάθημα των Μαθηματικών. Επιχειρήσαμε αυτή την επιστημονική υπόθεση και ερευνήσαμε με ποιοτικές μεθόδους την ορθότητά της. Τα αποτελέσματα ήταν ενθαρρυντικά. Δεν αναμέναμε, εξάλλου, ριζικές αλλαγές σε παγιωμένες νοοτροπίες πολλών ετών. Με τη διασταύρωση, μέσω της μεθόδου του τριγωνισμού: «απόψεις δασκάλων-απόψεις μαθητών-ερευνητικές διαπιστώσεις από την παρατήρηση», ενισχύεται η επιστημονική εγκυρότητα και αξιοπιστία των συμπερασμάτων της ερευνητικής μας προσπάθειας. Τα αποτελέσματα συγκλίνουν στο ότι «πράγματι» στη σχολική πράξη της συγκεκριμένης τάξης, κατά τη διάρκεια του διαθεματικού project, συνέβησαν οι αλλαγές που αναφέραμε προηγουμένως στις εννοιολογικές κατηγορίες. Μπορούμε, πλέον, να συμπεράνουμε με μεγάλη πιθανότητα ότι η συμβολή της διαθεματικής προσέγγισης και της διδακτικής μεθόδου project είναι απαραίτητη μέσα στο όραμα για αναθεώρηση της μαθηματικής εκπαίδευσης που έχει αρχίσει παγκοσμίως να ξεπροβάλλει και σταδιακά να υλοποιείται.

Βιβλιογραφία

Alcaro, P. – Alston, A. – Katims, N. (2000) Children Thinking and Talking Mathematically: Fractions attack! In: *Teaching Children Mathematics,* 562-566.

Altrichter, H. – Posch, P. – Somekh, B. (2001), *Οι εκπαιδευτικοί ερευνούν το έργο τους: Μια Εισαγωγή στις Μεθόδους της Έρευνας Δράσης*, Μεταίχμιο, Αθήνα.

Anderson, G.L. (1989), Critical ethnography in education: Origins, current status, and new directions. *Review of Educational Research*, *59*(3), 249-270.

Brousseau, G. (1990) Le contrat didactique: le milieu, In: *RDM 3*(3).

Chard, S. (1992). *The Project Approach: A Practical Guide for Teachers*. Edmonton, Alberta: University of Alberta Printing Services.

Dewey, J. (1916). *Democracy and Education*. New York: The Free Press.

Dorfler, W. – McLone, R.R. (1986), Mathematics as a school subject, In *Perspectives on mathematics education*, 49-97, Reidel Publishing Company.

Freire, P. (1973) *Education for Critical Consciousness*, NY: Continuum Int. Publishing.

Glaser, B. – Strauss, A. (1968) *The Discovery of Grounded Theory*, Weidenfeld: London.

Goodson, I. – Walker R. (1990) *Biography, Identity and Schooling*, Philadelphia.

Gravemejer, K. (1998) Developmental Research as a research method. In: *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, 277-295, Kluwer.

Hammersley, M. – Atkinson, P. (1983) *Ethnography: principles in practice*, Tavistock.

Hargreaves, A. – Fullan, M. (1995), *Η Εξέλιξη των εκπαιδευτικών*, *Πατάκης*, Αθήνα.

Heath, S.B. (1982) Ethnography in Education: defining the essentials. In: Gillmore, P. – Glatthorn, A. (Eds). Washington, DC: Center for Applied Linguistics, 35-55.

Huberman, M. (1989) The professional life cycle of teachers, In: *Teachers College Record,* 91, 31-57.

Johnson, D.W. – Johnson, R.T. (1992) Positive interdependence: Key to effective cooperation, In *Interaction in Cooperative groups*, 174-199, Cambridge.

Καφούση, Σ. (1994) Το Λάθος στη Μάθηση και Διδασκαλία των Αριθμητικών Πράξεων, *Ευκλείδης Γ',* Τόμος 11, Τεύχος 39, Ε.Μ.Ε., Αθήνα.

Kilpatrick, W.H. (1925), *Foundations of Method*, New York: Macmillan.

Lampert, M. (1988) *The teacher's role in reinventing the meaning of mathematical knowing in the classroom*, Inst. for Research on Teaching-Mich.St. University.

Louden,W.R. (1989) *Understanding teaching: meaning and method on collaborative research*, University of Toronto.

Ματσαγγούρας, Η.Γ. (2002) *Η Ευέλικτη Ζώνη των καινοτομιών: Οδηγός Σχεδίων Εργασίας για τον εκπαιδευτικό,* Π.Ι., Αθήνα.

Μπούφη, Α. (1995) Μια προσπάθεια αλλαγής του παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο, *Μαθηματική Επιθεώρηση,* 43, Ε.Μ.Ε. Αθήνα.

N.C.T.M., *Principles and Standards for School Mathematics*, 2000.

Oberg, A. – Underwood, S. (1989) *Βοηθώντας την αυτοεξέλιξη των εκπαιδευτικών: Στοχασμός με βάση την εμπειρία*, Ανακοίνωση στο συνέδριο με θέμα: «Εξέλιξη των εκπαιδευτικών: Πολιτικές, πρακτικές και έρευνα», στο Ontario Institute for Studies in Education, Τορόντο.

Πηγιάκη, Π. (1994) *Εθνογραφία: Η Μελέτη της Ανθρώπινης Διάστασης στην Κοινωνική και Παιδαγωγική Έρευνα*, Γρηγόρης, Αθήνα.

Rotman, Br. (1993). *Ad Infinitum: The Ghost in Turing's Machine: Taking God Out of Mathematics and Putting the Body Back*, In: Stanford: Stanford University Press.

Streefland, I. (2000) *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση* (εισαγωγή – επιμέλεια: Κολέζα, Ε.), *Leader Books*, Αθήνα.

Selvini-Palazzoli, M. *et al.* (1978) *Der entzauberte Magier. Zur paradoxen Situation des Schulpsychologen*. Stuttgart: *Klett.*

Thiessen, D. (1989) Alternative perspectives on teacher development, In: *Journal of Education Policy*, 4, 289-295.

Townsend, D. – Butt, R.L. (1990) *Collaborative autobiography, action research and professional development*, AERA, Boston.

Triadafillidis, Tr. A. (1998). Dominant Epistemologies in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, *18*(2), 21-27, FLM Publishing Association, Alberta.

Whitehead, A.N. (1948) *The Aims of Education and Other Essays*, N. Am. Library, N.Y.

Willis, P. (1977) *Learning to Labour: how working class kids get working class jobs*.