Η γραφή των αριθμών στο Ιωνικό αλφαβητικό σύστημα αρίθμησης και η χρήση τους σε κείμενα αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών

Γεώργιος Η. Μπαραλής

Λέκτορας του Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Αθηνών

Παρουσίαση του συστήματος

Στο αλφαβητικό (Ιωνικό) σύστημα οι αριθμοί παριστάνονται με σύμβολα, τα 24 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και 3 αρχαϊκά (φοινικικά), το δίγαμμα (⊏), το κόππα (Ϙ) και το σαμπί (Ͳ). Το σύμβολο (⊏, ς), με το οποίο παριστάνεται ο αριθμός 6, προέρχεται σύμφωνα με τον G. Ifrah από το φοινικικό Ουάου (𐤅, 10ος-9ος αιώνας π.Χ.) και χρησιμοποιήθηκε κατά τον 5ο αιώνα περίπου π.Χ. από τους Έλληνες με τη μορφή του συμβόλου *F* (δίγαμμα) (Ifrah, 1985, σελ. 195, 201). Ο S.T. Heath για το ίδιο σύμβολο αναφέρει ότι είναι μια μορφή του συμβόλου *F* (δίγαμμα), το οποίο τον 7ο και τον 8ο αιώνα μ.Χ. κατέληξε να γράφεται ως Ϛ και στη συνέχεια, επειδή έμοιαζε με το καλλιγραφικό ς (=στ), ονομάστηκε Στίγμα (Heath, 2001, σελ. 52). Το σύμβολο (Ϙ), με το οποίο παριστάνεται ο αριθμός 90, προέρχεται σύμφωνα με τον G. Ifrah από το φοινικικό Κωφ (𐤒, 10ος-9ος αιώνας π.Χ.) και χρησιμοποιήθηκε κατά τον 5ο αιώνα περίπου π.Χ. από τους Έλληνες με τη μορφή του συμβόλου (Ϙ) (Ifrah, 1985, σελ. 195, 201). Ο S.T. Heath αναφέρει ότι το Κόππα = Foph (Ϙ) χρησιμοποιήθηκε ανάμεσα στα γράμματα Π και Ρ για να παραστήσει τον αριθμό 90. Το σύμβολο (Ͳ), με το οποίο παριστάνεται ο αριθμός 900, προέρχεται, σύμφωνα με τον G. Ifrah, από το φοινικικό Σαντε (𐤑, 10ος-9ος αιώνας π.Χ.) και χρησιμοποιήθηκε κατά τον 5ο αιώνα περίπου π.Χ. από τους Έλληνες με τη μορφή του συμβόλου (Ϻ). (Ifrah, 1985, σελ. 195, 201). Ο S.T. Heath αναφέρει ότι το Ssade τοποθετήθηκε από τους Έλληνες στη θέση ύστερα από το Π και γραφόταν ως Ϻ ή n. Η μορφή του, που εμφανίζεται σε επιγραφές της Αλικαρνασσού και της Τέως, φαίνεται να προέρχεται από κάποια μορφή του Ssade. Αυτό το Ͳ, μετά την εξαφάνισή του από το λογοτεχνικό αλφάβητο, παρέμεινε ως αριθμητικό σύμβολο, λαμβάνοντας τις μορφές Λ, m, Π, п, Ͳ, έως ότου τον 15ο αιώνα έγινε ϡ, το οποίο κατά το δεύτερο ήμισυ του 17ου αιώνα ονομάστηκε sampi είτε λόγω του San που ακολουθούσε το Π είτε λόγω της ομοιότητάς του προς την κυρτή καλλιγραφική μορφή του Π (S.T. Heath, 2001, σελ. 52). Μετά, όμως, από την ανακάλυψη του Αλφαβηταρίου της

Σάμου οι παραπάνω απόψεις έχουν αλλάξει. Ο Ψυχογιός αναφέρει: “ ... το ϡ του Αλφαβηταρίου της Σάμου είναι το αρχαιότερο σαμπί σε ελληνική επιγραφή: όλες οι υπόλοιπες εμφανίσεις του ϡ χρονολογούνται μετά το 550 π.Χ. Η χρήση του, άλλωστε, είναι εντελώς περιορισμένη. ΄Εχει εντοπιστεί μόνο σε πέντε επιγραφές, μεταξύ του 550 και του 450 π.Χ., όλες από την Ιωνία, και με φωνητική αξία [SS] που δηλώνεται στις ίδιες περιοχές με ΣΣ: στην ΄Εφεσο, την Κύζικο, την Τέω, την Ερυθραία και την Αλικαρνασσό.” (Ψυχογιός, 2003, σελ. 68-69).

Η αντιστοιχία μεταξύ των γραμμάτων και των αριθμών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Σημερινή γραφή	Ιωνική γραφή	Σημερινή γραφή	Ιωνική γραφή	Σημερινή γραφή	Ιωνική γραφή
1	Α α′	10	Ι ι′	100	Ρ ρ′
2	Β β′	20	Κ κ′	200	Σ σ′
3	Γ γ′	30	Λ λ′	300	Τ τ′
4	Δ δ′	40	Μ μ′	400	Υ υ′
5	Ε ε′	50	Ν ν′	500	Φ φ′
6	⊏ ς′	60	Ξ ξ′	600	Χ χ′
7	Ζ ζ′	70	Ο ο′	700	Ψ ψ′
8	Η η′	80	Π π′	800	Ω ω′
9	Θ θ′	90	Ϙ ϙ	900	Ͳ ϡ

Αρχικά για τη γραφή των αριθμών χρησιμοποιούνταν τα κεφαλαία γράμματα και αργότερα τα μικρά. Υπάρχουν δύο τρόποι χρησιμοποίησης των γραμμάτων ως αριθμών. Με τον πρώτο τρόπο έβαζαν πάνω από το γράμμα μια οριζόντια παύλα και με το δεύτερο μια οξεία στο πάνω και δεξιό μέρος του αριθμού. Όπου, όμως, δεν υπήρχε σύγχυση ως προς τη γραφή των αριθμών και των γραμμάτων, οι οξείες παραλείπονταν.

Όλοι οι αριθμοί οι μικρότεροι του 1.000 γράφονταν με τρία το πολύ σύμβολα. Για να γράψουν αριθμούς μεγαλύτερους από το 999 χρησιμοποιούσαν διάφορα τεχνάσματα, τα οποία στηρίζονταν σε πολλαπλασιαστικές αρχές. ΄Ετσι, για παράδειγμα, μια μικρή γραμμή κάτω αριστερά από το γράμμα σήμαινε ότι ο αριθμός πολλαπλασιάζεται με το 1000. Επομένως, οι αριθμοί 1000, 2000, ..., 9000 δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

Σημερινή γραφή	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000
Ιωνική γραφή	,α	,β	,γ	,δ	,ε	,s	,ζ	,η	,ϑ

Άρα, για να γράψουν αριθμούς μικρότερους του 10.000, χρησιμοποιούσαν μόνο τέσσερα γράμματα, από τα οποία, μάλιστα, το ψηφίο των χιλιάδων ήταν όπως και των μονάδων, με μοναδική διαφορά το σημάδι του τόνου. Η χρήση αυτή, όπως αναφέρει ο C.B. Boyer, έπρεπε να έχει υποδείξει στους Έλληνες τα πλεονεκτήματα ενός ολοκληρωμένου συστήματος θέσης στη δεκαδική αρίθμηση. Φαίνεται, όμως, ότι δεν εκτίμησαν αρκετά αυτά τα πλεονεκτήματα. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι είχαν ένα παρόμοιο σχήμα στο μυαλό τους, αν χρησιμοποιούσαν τα γράμματα από το α μέχρι το θ για τις μονάδες και τις χιλιάδες, και τοποθετούσαν τα σύμβολα σύμφωνα με την τάξη μεγέθους τους, δηλαδή το μικρότερο στα δεξιά και το μεγαλύτερο στα αριστερά (Boyer, 1991, σελ. 60).

Για να γράψουν μεγαλύτερους αριθμούς χρησιμοποιούσαν το γράμμα Μ= 10.000, τη μυριάδα του παλιού αττικού συστήματος, της οποίας τα πολλαπλάσια γράφονταν $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$, $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$, $\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$, $\overset{\delta}{\mathrm{M}}$,..., ή αΜ, βΜ, γΜ, δΜ, ..., . Έτσι, ένα ιωνικό σύμβολο πάνω από το γράμμα Μ δήλωνε τον πολλαπλασιαστή, οπότε ο αριθμός $\overset{\delta}{\mathrm{M}}$ = 4×10.000=40.000. Ο ίδιος αριθμός, ακόμη, συμβολιζόταν δΜ= 4×10.000= 40.000 (Wilder, σελ. 79). Για παράδειγμα, οι συμβολισμοί εΜ, $\underset{\beta}{\overset{\varepsilon}{\mathrm{M}}}$, $\overset{\delta}{\mathrm{M}}{,\gamma}$ και $\overset{\delta}{\mathrm{M}}\,\gamma$ παριστάνουν αντίστοιχα τους αριθμούς: 50.000, 52.000, 43.000 και 40.003.

Ακόμη, για να παραστήσουν τις μυριάδες, τοποθετούσαν πάνω από το γράμμα (σύμβολο) δύο τελείες. Ο συμβολισμός αυτός χρησιμοποιείται συχνά στα Γεωμετρικά του Ήρωνα. Για παράδειγμα, οι συμβολισμοί $\ddot{\delta}$, $\ddot{\varepsilon}$ και $,\ddot{\varepsilon}$ παριστάνουν αντίστοιχα τους αριθμούς 4×10.000= 40.000, 5×10^4= 50.000 και 5.000×10^4= 50.000.000.

Ο Ε. Σταμάτης αναφέρει ότι ο αριθμός των μυριάδων αντί να γράφεται πάνω από το Μ μπορούσε να γραφεί αμέσως δεξιά του Μ, οπότε και έπρεπε ο αριθμός να χωριστεί με μια τελεία από τον αριθμό της μικρότερης της μυριάδας τάξης. Για παράδειγμα, ο αριθμός $\overset{,\delta\upsilon\mu\eta}{\mathrm{M}}$,γωξβ′ παριστάνει το 44.483.862 και ο αριθμός ͵δυμη′. ͵γ ωξβ′ παριστάνει το 44.483.862. Την ίδια αρχή εφάρμοζαν στο τετράγωνο της μυριάδας, όταν αναφέρονταν σε ακόμη μεγαλύτερους αριθμούς.

Αν ένας αριθμός εκτός από τις μυριάδες περιείχε και άλλους αριθμούς μικρότερης τάξης, αυτοί γράφονταν δεξιά του γράμματος Μ ή και ακόμη μπορούσε να παραλειφθεί το γράμμα Μ, να γραφεί τελεία στη θέση του και να ακολουθήσει ο μικρότερος αριθμός της μυριάδας. Έτσι, οι συμβολισμοί σο. ͵β υνδ και ͵ε τλζ. ͵η χξβ παριστάνουν αντίστοιχα τους αριθμούς 2.702.454 και 53.378.662. Οποιοσδήποτε αριθμός γραφόταν από τα αριστερά προς τα δεξιά με φθίνουσα τάξη μεγέθους. Ο τρόπος αυτός εφαρμοζόταν στην ευρωπαϊκή Ελλάδα. Σε επιγραφές της Μικράς Ασίας παρατηρείται το φαινόμενο να διατάσσονται τα γράμματα με αλφαβητική σειρά, ενώ αρκετές φορές η διάταξη είναι και μεικτή. Έτσι, ο αριθμός 111 γραφόταν ΡΙΑ ή ΑΙΡ ή ΡΑΙ (Heath, 2001, σελ. 56).

Παραδείγματα γραφής των αριθμών στο αλφαβητικό σύστημα αρίθμησης:

1) ο αριθμός ογʹ παριστάνει το 73

2) ο αριθμός φμηʹ παριστάνει το 548

3) ο αριθμός ψϘθʹ παριστάνει το 799

4) ο αριθμός ͵*η* τκδʹ παριστάνει το 8.324

5) ο αριθμός ͵*β* αεʹ παριστάνει το 2.015

6) ο αριθμός $\overset{\mu}{\mathrm{M}}$ ͵*γ* χπηʹ παριστάνει το 403.688

7) ο αριθμός $\overset{\nu\delta}{\mathrm{M}}$ ͵*ε* ζʹ παριστάνει το 545.007

8) ο αριθμός $\overset{\tau\mu\theta}{\mathrm{M}}$ ͵*ς* σοεʹ παριστάνει το 3.496.275

Οι μεγάλοι αριθμοί, όπως είναι τα εκατομμύρια, τα δισεκατομμύρια, τα τρισεκατομμύρια κ.τ.λ., ασκούσαν πάντοτε μια γοητεία σε κάθε άνθρωπο οποιασδήποτε ηλικίας. Στο αλφαβητικό σύστημα αρίθμησης ήταν δύσκολο να γραφούν τόσο μεγάλοι αριθμοί. Παρ' όλα αυτά, όμως, αναπτύχθηκαν τρόποι γραφής μεγάλων αριθμών από τον Αρχιμήδη, τον Απολλώνιο και άλλους, οι οποίοι χρησιμοποίησαν και διαφορετικούς συμβολισμούς.

Ο Απολλώνιος ο Περγαίος ανέπτυξε ένα σύστημα «τετράδων» για να εκφράσει μεγάλους αριθμούς χρησιμοποιώντας κάτι ανάλογο με τους εκθέτες της μιας μυριάδας. Οι τετράδες του ονομάζονταν μυριάδες απλές, διπλές, τριπλές κ.ο.κ. Ο Πάππος περιγράφει στο τελευταίο τμήμα του βιβλίου ΙΙ της *Μαθηματικής Συλλογής* του ένα αριθμητικό σύστημα που μάλλον ήταν του Απολλώνιου. Στο έργο αυτό ο αριθμός $5.462.360.064 \times 10^6$ γράφεται μ^γ ͵*ε* υξβ μ^β ͵*γ* χ μ^α ͵*ς* υ, όπου μ^γ, μ^β και μ^α είναι αντίστοιχα η τρίτη, η δεύτερη και η πρώτη δύναμη της μυριάδας (Boyer, 1991, σελ. 141).

Ο Νικόλαος Ραβδάς (14ος αι. μ.Χ.) έδωσε μια άλλη, λιγότερο πρακτική μέθοδο συμβολισμού των διαδοχικών δυνάμεων του 10.000. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, ένα ζευγάρι από τελείες πάνω από τα συνηθισμένα αριθμητικά σύμβολα δήλωνε το πλήθος των μυριάδων, ενώ η διπλή μυριάδα συμβολιζόταν με δύο ζεύγη από τελείες, το ένα πάνω από το άλλο, η τριπλή μυριάδα με τρία ζεύγη κ.ο.κ. Για παράδειγμα:

$$\ddot{\eta} = 80.000\,, \quad \overset{\cdot\cdot}{\ddot{\mathrm{o}}} = 70\,(10.000)^2\,, \quad \overset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{\ddot{\sigma}}} = 200\,(10.000)^3.$$

Στα έργα του Αρχιμήδη που έχουν χαθεί υπήρχε και ένα βιβλίο αριθμητικού περιεχομένου αφιερωμένο στον Ζεύξιππο. Για το έργο αυτό γνωρίζουμε από τον ίδιο τον Αρχιμήδη ότι πραγματευόταν την *κατονόμαξιν των αριθμών* και ανέπτυσσε το σύστημα που ονομαζόταν *Αρχαί* και το οποίο συναντάμε στον *Ψαμμίτη*. Στο έργο αυτό ο Αρχιμήδης εκφράζει αριθμούς μεγαλύτερους από εκείνους που μπορούσαν να γραφούν με το συνηθισμένο ελληνικό συμβολισμό, δηλαδή αριθμούς μέχρι τον τεράστιο αριθμό που παριστάνεται από τη μονάδα η οποία ακολουθείται από 80.000 εκατομμύρια εκατομμυρίων ψηφία. Το έργο «Ο Ψαμμίτης» είναι ουσιαστικά μια πραγματεία που περιγράφει πώς θα μπορούσε να υπολογιστεί το πλήθος των κόκκων της άμμου αν το σύμπαν ήταν γεμάτο με άμμο, πώς, δηλαδή, μπορεί κανείς να γράψει μεγάλους αριθμούς και να κάνει πράξεις με αυτούς.

Η μέθοδος λειτουργεί στη βάση των οκτάδων: $10.000^2 = 100.000.000 = 10^8$, και όλοι οι αριθμοί από τον 1 μέχρι και τον 10^8 σχηματίζουν την πρώτη τάξη. Ο τελευταίος αριθμός, 10^8, της πρώτης τάξης θεωρείται ως η μονάδα της δεύτερης τάξης, η οποία αποτελείται από όλους τους αριθμούς μεταξύ 10^8 ή 100.000.000, και 10^{16} ή $100.000.000^2$. Όμοια, ο αριθμός 10^{16} θεωρείται ως η μονάδα της τρίτης τάξης, η οποία αποτελείται από όλους τους αριθμούς από τον 10^{16} μέχρι τον αριθμό 10^{24} κ.τ.λ.

Στον *Ψαμμίτη*, επίσης, ο Αρχιμήδης δίνει ένα κανόνα που είναι ισοδύναμος με το σημερινό τύπο

$$\alpha^{\nu}.\alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu}$$

Για να χρησιμοποιήσουν αυτό τον κανόνα στον υπολογισμό, για παράδειγμα, του «σ′ επί ψ′» (200 επί 700), προσδιόριζαν πρώτα τους πυθμένες 2 και 7 των σ′ και ψ′ αντίστοιχα βρίσκοντας το γινόμενό τους, 14 , και μετά με τον κανόνα του Αρχιμήδη $10^2 \,.\, 10^2 = 10^4$, οπότε το γινόμενο βγαίνει ότι είναι 14 μυριάδες (Σταμάτη, Ε., “Αρχιμήδους Άπαντα”, τόμ. Β′, σελ. 180-215).

Στο αλφαβητικό σύστημα αρίθμησης υπάρχουν αρκετά μειονεκτήματα αλλά και πλεονεκτήματα.

Τα βασικά του μειονεκτήματα είναι:

1. Η αδυναμία του συστήματος να εκφράσει απεριόριστα μεγάλους αριθμούς, αφού, για να γίνει αυτό, θα έπρεπε να δημιουργούνται συνεχώς νέα σύμβολα.
2. Οι σχέσεις ανάμεσα σε διάφορους αριθμούς δεν ήταν απόλυτα ξεκάθαρες. Αυτό, για παράδειγμα, σημαίνει ότι δεν υπήρχε φανερός συσχετισμός ανάμεσα στους αριθμούς τρία (γ′) , τριάντα (λ′) και τριακόσια (τ′).
3. Μπορούσε να λειτουργεί χωρίς το μηδέν, επειδή δεν χρησιμοποιούσε την αξία θέσης.
4. Οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις των πολλαπλασίων δεν εμφάνιζαν ομοιότητες μεταξύ τους. Για παράδειγμα, αν και γνώριζαν ότι η πρόσθεση του 3 με το 5 δίνει 8, αυτό δεν τους βοηθούσε να καταλάβουν ότι προσθέτοντας το 30 με το 50 παίρνουμε 80.
5. Η έλλειψη κλασματικών παραστάσεων αντίστοιχων με τα δικά μας δεκαδικά κλάσματα.

Τα βασικά του πλεονεκτήματα είναι:

1. Η αναπαράσταση των αριθμητικών ψηφίων βασιζόταν στα γράμματα της αλφαβήτου, οπότε ήταν αρκετή η γνώση μιας μόνο ακολουθίας συμβόλων, παρόλο που και αυτό από μόνο του μπορούσε να οδηγήσει σε πολλές συγχύσεις.

2. Όλοι οι αριθμοί πάνω από το 999 μπορούσαν να αναπαριστάνονται με τρία το πολύ σύμβολα.
3. Το σύστημα χαρακτηρίστηκε από τον C.B. Boyer ως η μεγαλύτερη μεμονωμένη πρόοδος που έγινε ποτέ στην αρίθμηση και την πρακτική αριθμητική.
4. Εξυπηρετούσε όλες τις ανάγκες μέτρησης της εποχής και ήταν εξίσου αποτελεσματικό με το δικό μας σύγχρονο αριθμητικό σύστημα για τους συνήθεις υπολογισμούς.

Η χρήση των γραμμάτων για την παράσταση των αριθμών στο αλφαβητικό σύστημα αρίθμησης δεν ήταν επωφελής για την ανάπτυξη της άλγεβρας, γιατί δεν έδινε τη δυνατότητα να χρησιμοποιούνται τα γράμματα για την παράσταση απροσδιόριστων ποσοτήτων ή αγνώστων, όπως γίνεται σήμερα.

Έχει υποστηριχτεί ότι, επειδή το σύστημα αρίθμησης αποθάρρυνε την έρευνα στον κόσμο των αριθμών, οι Έλληνες μαθηματικοί προόδευσαν στον τομέα της Γεωμετρίας.

Τα κλάσματα και οι μεικτοί αριθμοί

Το αλφαβητικό σύστημα αρίθμησης παρουσίαζε αδυναμία στη χρήση των κλασμάτων. Για να γράψουν τις κλασματικές μονάδες, αφαιρούσαν την *παύλα* (αν έγραφαν με *παύλα* τον αριθμό) και τόνιζαν το τελευταίο γράμμα του αριθμού ή τοποθετούσαν δύο τόνους πάνω στο τελευταίο γράμμα του αριθμού.

Για παράδειγμα, τις παρακάτω κλασματικές μονάδες: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{16}$ και $\frac{1}{78}$ τις έγραφαν αντίστοιχα:

ε′, ις′ και οη′ αν $\overline{\varepsilon} = 5$, $\overline{\iota\varsigma} = 16$ και $\overline{o\eta} = 78$ ή
ε″, ις″ και οη″ αν ε′ = 5, ις′ =16 και οη′ = 78

Τα κλάσματα τα έγραφαν στην αρχή επηρεασμένοι από το αιγυπτιακό σύστημα αρίθμησης ως άθροισμα εναδικών κλασμάτων. Έτσι, για να γράψουν κλάσματα με αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή, διασπούσαν το κλάσμα σε άθροισμα κλασματικών μονάδων. Η παράθεση των κλασμάτων σημαίνει πρόσθεση αυτών χωρίς το πρόσημο *συν*. Έτσι, τις παρακάτω κλασματικές ισότητες σε σύγχρονη μορφή:

$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, $\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$ θα τις έγραφαν: $\frac{5}{6}=\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ και $\frac{5}{7}=\frac{1}{2}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{14}$. Άρα: το κλάσμα $\frac{5}{6}$ θα το έγραφαν β′ γ′ και το $\frac{5}{7}$ θα το έγραφαν β′ ζ′ ιδ′.

Για το κλάσμα $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ χρησιμοποιούσαν τα σύμβολα ω′ και β̸ ενώ για το $\frac{1}{2}$ χρησιμοποιούσαν το σύμβολο *L*′ ή C′. Επίσης, για τις κλασματικές μονάδες χρησιμοποιούσαν αρκετές φορές τις εκφράσεις «πέμπτο μέρος» για το $\frac{1}{5}$, «τριακοσιοστό μέρος» για το $\frac{1}{300}$ κ.τ.λ.

Αργότερα τα κλάσματα τα έγραφαν με διάφορους τρόπους ως ζευγάρια αριθμών. Έτσι, ο αριθμός ια′μζ″ παριστάνει το κλάσμα $\frac{11}{47}$.

Αρκετές φορές σημείωναν πρώτα τον αριθμητή με ένα τόνο και δίπλα του μια ή δυο φορές τον παρονομαστή διπλά τονισμένο. Ο αριθμός νζ′ πε″ πε″ παριστάνει το κλάσμα $\frac{57}{85}$.

Ένας άλλος τρόπος ήταν αυτός σύμφωνα με τον οποίο έγραφαν πάνω τον παρονομαστή και κάτω τον αριθμητή χωρίς τη σημερινή διαχωριστική γραμμή του κλάσματος, όπως οι αριθμοί $\genfrac{}{}{0pt}{}{\eta'}{\varepsilon'}$, $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mu\alpha'}{\lambda\zeta'}$ και $\genfrac{}{}{0pt}{}{\psi\eta'}{\tau o\varepsilon'}$ παριστάνουν αντίστοιχα τα κλάσματα $\frac{5}{8}$, $\frac{37}{41}$ και $\frac{375}{708}$. Αυτός ο τρόπος γραφής των κλασμάτων, με τον αριθμητή κάτω από τον παρονομαστή, αντιστράφηκε κατά το τέλος της αλεξανδρινής εποχής.

Όταν υπάρχουν κλασματικές μονάδες, τότε αυτές γράφονται δεξιά από τον αριθμό και σε ίσες αποστάσεις. Ο αριθμός $12\frac{3}{4} = 12\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ γράφεται: ιβ L' δ′.

Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος για τα κλάσματα έγραφε ολογράφως τον αριθμητή και αριθμητικά τον παρονομαστή. Έτσι, για παράδειγμα, το κλάσμα $\frac{3}{64}$ το έγραφε: «τρία $\overline{\xi\delta}'$».

Ο Αρχιμήδης έγραφε πρώτα τον αριθμητή και στη συνέχεια τον παρονομαστή, αλλά με ένα τόνο στο τελικό ψηφίο. Το κλάσμα $\frac{10}{71}$ το έγραφε: ι′οα′ και τον αριθμό $2.334\frac{1}{4}$ τον έγραφε: ͵β τλδ′ δ′.

Ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς έγραφε τον αριθμητή και δεξιότερα την κλασματική μονάδα δύο φορές. Έτσι, για παράδειγμα, το κλάσμα $\frac{2}{5}$ το έγραφε: $\overline{\beta}$ ε′ε′ και το κλάσμα $\frac{7}{11}$ το έγραφε: $\overline{\zeta}$ ια′ια′. Επίσης, ο Ήρων τα κλάσματα τα εκφράζει και σε «λεπτά», δηλαδή «μέρη». Το κλάσμα $\frac{5}{17}$ το έγραφε: ιζ′ιζ′ $\overline{\varepsilon}$ δηλαδή «μέρη» (ή λεπτά) των δεκάτων εβδόμων «πέντε».

Ο Διόφαντος έγραφε πρώτα τον παρονομαστή του κλάσματος και ως εκθέτη την κατάλληλη κατάληξη «ων», «ος», «ον», «α» και μετά τον αριθμητή. Έτσι το κλάσμα $\frac{9}{7}$ το έγραφε: ζ^{ων} $\overline{\theta}$ δηλαδή των εβδόμων τα εννέα. Το πέμπτο μέρος, δηλαδή το $\frac{1}{5}$, το έγραφε ε^{ον}, και ο αριθμός 4 γραφόταν δ^{ος}.

Αν ένας μεικτός αριθμός είχε ως κλασματικό μέρος το $\frac{1}{2}$ ή το $\frac{2}{3}$ τότε έγραφαν τον ακέραιο αριθμό κανονικά και στη συνέχεια το ειδικό σύμβολο γι' αυτά τα κλάσματα. Αν ο αριθμός ήταν ο $136\,\frac{1}{2}$ αυτός θα γραφόταν: $\overline{\varrho\lambda\varsigma}\ L'$, και αν ο αριθμός ήταν ο $474\,\frac{2}{3}$ αυτός θα γραφόταν: $\overline{\upsilon o\delta}$ ω′ ή $\overline{\upsilon o\delta}$ β̸. Άλλος τρόπος γραφής των μεικτών αριθμών ήταν εκείνος βάσει του οποίου έγραφαν πρώτα το πλήθος των μονάδων και στη συνέχεια το κλάσμα. Έτσι, ο αριθμός $13\,\frac{27}{14}$ γραφόταν: μονάδες $\overline{\iota\gamma}$ και λεπτά $\overline{\varkappa\zeta}$ ιδ′ιδ′ ή μονάδες $\overline{\iota\gamma}$ και λεπτά ιδ′ιδ′ $\overline{\varkappa\zeta}$.

Επειδή σε αρκετές περιπτώσεις η γραφή των κλασμάτων μπορούσε να οδηγήσει σε παρανοήσεις, αφού, π.χ., το λδ′ μπορεί να ερμηνευτεί ως το $\frac{1}{34}$ αλλά και ως το $30\,\frac{1}{4}$, οι αρχαίοι Έλληνες για την πραγματική αξία του αριθμού βασίζονταν, όπως και οι Βαβυλώνιοι, στα συμφραζόμενα του κειμένου για την αποφυγή τέτοιων προβλημάτων.

Η γραφή των αριθμών στο αλφαβητικό σύστημα αρίθμησης σε κείμενα αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών

Στη συνέχεια παραθέτουμε ενδεικτικά αποσπάσματα από τα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών Αρίσταρχου του Σάμιου και Αρχιμήδη στα οποία χρησιμοποιείται το αλφαβητικό σύστημα αρίθμησης.

Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος έζησε περίπου το διάστημα 310-230 π.Χ. Το μόνο από τα γραπτά έργα του που έχει διασωθεί ακέραιο είναι η πραγματεία του «Περί μεγεθών και αποστημάτων Ηλίου και Σελήνης». Η πραγματεία γράφτηκε κατά τα μέσα του 3^{ου} π.Χ αιώνα και αποτελεί την πρώτη προσπάθεια του ανθρώπου να απομακρύνει τη Γη από το κέντρο του Σύμπαντος και να μελετήσει τον Ήλιο, τη Σελήνη και τα άλλα ουράνια σώματα. Το έργο αποτελείται από 6 υποθέσεις και 18 γεωμετρικές προτάσεις, από τις οποίες θα παρουσιάσουμε τη 18^{η}.

ιη΄.

Ἡ γῆ πρὸς τὴν σελήνην ἐν μείζονι μὲν λόγῳ ἐστὶν ἢ ὃν ⟨ἔχει⟩ $\overset{\rho\kappa\epsilon}{M}$͵θψιβ πρὸς $\overset{\zeta}{M}$͵θφζ, ἐν ἐλάσσονι δὲ ἢ ὃν $\overset{\kappa\alpha}{M}$͵ϛ πρὸς ͵ϛωνθ.

Ἔστω γὰρ γῆς μὲν διάμετρος ἡ *Α*, σελήνης δὲ ἡ *Β*· ἡ *Α* ἄρα πρὸς τὴν *Β* μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν τὰ ρη πρὸς τὰ μγ, ἐλάσσονα δὲ ἢ ὃν τὰ ξ πρὸς ιθ· καὶ ὁ ἀπὸ τῆς *Α* ἄρα κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς *Β* κύβον μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν $\overset{\rho\kappa\epsilon}{M}$͵θψιβ πρὸς $\overset{\zeta}{M}$͵θφζ, ἐλάσσονα δὲ ἢ ὃν $\overset{\kappa\alpha}{M}$͵ϛ πρὸς ͵ϛωνθ. ὡς δὲ ὁ ἀπὸ τῆς *Α* κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς *Β* κύβον, οὕτως ἐστὶν ἡ γῆ πρὸς τὴν σελήνην· ἡ γῆ ἄρα πρὸς τὴν σελήνην μείζονα μὲν λόγον ἔχει ἢ ὃν $\overset{\rho\kappa\epsilon}{M}$͵θψιβ πρὸς $\overset{\zeta}{M}$͵θφζ, ἐλάσσονα δὲ ἢ ὃν $\overset{\kappa\alpha}{M}$͵ϛ πρὸς ͵ϛωνθ.

Απόδοση στα νέα ελληνικά:

Πρόταση 18^{η}

Ο λόγος της γης προς τη σελήνη είναι μεγαλύτερος του $\frac{125.971}{79.507}$ και μικρότερος του $\frac{21.600}{6.859}$.

Απόδειξη

Αν Α είναι η διάμετρος της γης και Β η διάμετρος της σελήνης, τότε ο λόγος της Α προς τη Β είναι μεγαλύτερος του $\frac{108}{43}$ και μικρότερος του $\frac{60}{19}$ (Πρόταση 17^{η}). Επομένως, ο λόγος του κύβου της Α προς τον κύβο της Β είναι μεγαλύτερος του $\frac{125.971}{79.507}$ και μικρότερος του $\frac{21.600}{6.859}$. Είναι δε ο λόγος του κύβου της Α προς τον κύβο της Β ίσος με το λόγο της σφαίρας της γης προς τη σφαίρα της σελήνης. Άρα, ο λόγος της σφαίρας της γης προς τη σφαίρα της σελήνης είναι μεγαλύτερος του $\frac{125.971}{79.507}$ και μικρότερος του $\frac{21.600}{6.859}$.

Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) ζούσε στις Συρακούσες, ήταν γιος του αστρονόμου Φειδία, είχε στενές σχέσεις με τον βασιλιά Ιέρωνα και με τον γιο του Γέλωνα, και θεωρείται ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της αρχαιότητας. Έγραψε πολλά έργα, τα οποία θεωρούνται μνημεία μαθηματικής έκφρασης. Από το έργο του Αρχιμήδη «Κύκλου Μέτρησις» παραθέτουμε το ακόλουθο απόσπασμα από την πρόταση 3, όπου γίνεται χρήση του αλφαβητικού συστήματος αρίθμησης:

διὰ τοῦτο οὖν ἡ ΑΗ πρὸς [τὴν]
ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵βϡια΄ πρὸς ψπ΄, ἡ δὲ ΑΓ
H 242 *πρὸς τὴν ΓΗ ἐλάσσονα ἢ ὃν ͵γιγ΄ L΄ δ΄ πρὸς ψπ΄. δίχα ἡ ὑπὸ*
ΓΑΗ τῇ ΑΘ· ἡ ΑΘ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν ΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ͵εϡκδ΄ L΄ δ΄ πρὸς ψπ΄ ἢ ὃν ͵αωκγ΄ πρὸς σμ΄· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας δ΄ ιγ΄· ὥστε ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΘ ἢ ὃν ͵αωλη΄ θ΄ ια΄ πρὸς σμ΄. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ΚΑ· καὶ ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΓ ἐλάσσονα [ἄρα] λόγον ἔχει ἢ ὃν ͵αζ΄ πρὸς ξς΄· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ια΄ μ΄. ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς [τὴν] ΚΓ ἢ ὃν ͵αθ΄ ς΄ πρὸς ξς΄. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΑΓ τῇ ΛΑ· ἡ ΑΛ ἄρα πρὸς [τὴν] ΛΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν τὰ ͵βις΄ ς΄ πρὸς ξς΄, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΛ ἐλάσσονα ἢ τὰ ͵βιζ΄ δ΄ πρὸς ξς΄.

Απόδοση στα νέα ελληνικά:

Γι' αυτό, λοιπόν, ΑΗ : ΗΓ $< \frac{291}{780}$ και ΑΓ : ΓΗ < 3.013 $\frac{3}{4}$: 780. Αν διχοτομηθεί η γωνία ΓΑΗ από την ΑΘ, τότε για τους ίδιους λόγους ΑΘ : ΘΓ < 5.924 $\frac{3}{4}$: 780 και ΑΘ : ΘΓ < 1.823 240, γιατί οι αριθμοί 1.823 και 240 είναι τα $\frac{4}{13}$ αντίστοιχα των αριθμών 5.924 $\frac{3}{4}$ και 780. Άρα ΑΓ : ΓΘ < 1.838 $\frac{9}{11}$: 240. Αν διχοτομηθεί ακόμη η γωνία ΘΑΓ από την ΚΑ, θα είναι ακόμη και ΑΚ:ΚΓ <1.007:66 γιατί οι αριθμοί 1.007 και 66 είναι τα $\frac{11}{40}$ αντίστοιχα των αριθμών 3.661 $\frac{9}{11}$ και 240. Άρα ΑΓ : ΚΓ < 1.009 $\frac{1}{6}$: 66. Αν διχοτομηθεί ακόμη η γωνία ΚΑΓ από την ΛΑ θα είναι ΑΛ:ΛΓ < 2.016 $\frac{1}{6}$: 66 και ΑΓ:ΓΛ < 2.017 $\frac{1}{4}$: 66. (Σταμάτη, Ε., *Αρχιμήδους Άπαντα*, τόμ. Α′, Μέρος Β′, σελ. 222-227).

Συμπεράσματα

Οι Έλληνες για τις καθημερινές ανάγκες τους χρειάζονταν ένα εύχρηστο σύστημα αρίθμησης και για το λόγο αυτό ανέπτυξαν δύο τρόπους γραφής των αριθμών. Στα παλαιότερα χρόνια χρησιμοποιούσαν το Ακροφωνικό (Ηρωδιανικό) σύστημα και αργότερα το Ιωνικό αλφαβητικό σύστημα αρίθμησης.

Το αλφαβητικό σύστημα αρίθμησης θεωρείται ένα από τα πιο τελειοποιημένα συστήματα αρίθμησης ως την επικράτηση του Ινδοαραβικού συστήματος, το οποίο και χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα. Δημιουργήθηκε από τους Έλληνες της Ιωνίας γύρω στα μέσα του 5^{ου} π.Χ. αιώνα. Είναι δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και δεν έχει ειδικό σύμβολο για το μηδέν.

Η πρώτη παρουσίαση των αριθμητικών συμβόλων εμφανίζεται σε επιγραφές και σε παπύρους που έχουν βρεθεί στην Αλικαρνασσό, στην Αθήνα και στην Αίγυπτο. Το αλφαβητικό σύστημα αρίθμησης χρησιμοποιείται επίσημα από την εποχή των Πτολεμαίων σε επιγραφές και σε νομίσματα. Όλοι οι αριθμοί γράφονται χρησιμοποιώντας είκοσι επτά διαφορετικά σύμβολα. Για τους μεγάλους αριθμούς χρησιμοποιούσαν διάφορα τεχνάσματα, τα οποία στηρίζονταν σε πολλαπλασιαστικές αρχές. Για να παραστήσουν τα κλάσματα και τους μεικτούς αριθμούς χρησιμοποίησαν διάφορους τρόπους.

Το αλφαβητικό σύστημα αρίθμησης, πολύ πιο απλό στην αναγραφή μεγάλων αριθμών, θα εκτοπίσει το παλαιότερο ακροφωνικό και από το 100 μ.Χ. περίπου αποτελεί το μοναδικό αριθμητικό σύστημα γραφής, το οποίο διατηρήθηκε ακόμη και σε ολόκληρη τη βυζαντινή εποχή.

Από την αρχαιότητα μέχρι το τέλος του Μεσαίωνα το αλφαβητικό σύστημα αρίθμησης έπαιξε ένα σημαντικό ρόλο στην Εγγύς Ανατολή και σε όλη την ανατολική Μεσόγειο, τον ίδιο σημαντικό με εκείνον που έπαιξε το ρωμαϊκό σύστημα στη Δύση. Στα πρώτα μεταχριστιανικά χρόνια υιοθετήθηκε από τους χριστιανούς της Αιγύπτου, τους κατοίκους της Συρίας και της Μεσοποταμίας και λίγο αργότερα από τους μουσουλμάνους λογιστές.

Βιβλιογραφία

Boyer, B.C. (revised by Uta C. Merzbach) (1991), *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc.

Cajori, F. (1928), *A History of Mathematical Notations*, Volume 1: *Notations in Elementary Mathematic,* La Salle, III. , Open Court.

Διόφαντος (1995), *Άπαντα 3 Ελληνικά Ι*, Κάκτος.

Flegg, G. (1984), *Numbers: Their History and Meaning*, Harmondsworth, Penguin.

Heath, T.L. (2001), *Ιστορία των ελληνικών μαθηματικών*, τόμ. Ι, Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης, Αθήνα.

Heath, T.L. (2005), *Αρίσταρχος ο Σάμιος ο Αρχαίος Κοπέρνικος* (μτφρ. Θ. Γραμμένος), Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα.

Hughes, M. (2002), *Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών* (μτφρ. Ματούλα Σταφυλίδου, επιμ. Στέλλα Βοσνιάδου), Gutenberg, Αθήνα.

Ifrah, G. (1985), *Παγκόσμια Ιστορία των Αριθμών*, Σμυρνιωτάκης, Αθήνα.

Κηπουρός, Χ. (1995), *Ήρωνος Αλεξανδρέως Ονόματα Γεωμετρικών όρων Γεωμετρικά*, Ε.Μ.Ε, Αθήνα.

Loria, G. (1971), *Η Ιστορία των Μαθηματικών*, τόμ. 1ος, Ε.Μ.Ε., Αθήνα.
Menninger, K. (1992), *Number Words and Number symbols, A Cultural History of Numbers*, Dover Publications, INC., New York.
Οικονόμου, Η. (1976), *Γραμματική Αρχαίας Εβραϊκής*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα.
Oystein, Ore (1967), *Invitation to Number Theory*, The Mathematical Association of America. New Mathematical Library.
Smith, D.E., *History of Mathematics*, vol. II, Dover Publications, INC, New York.
Σταμάτης, Ε. (1970), *Αρχιμήδους Άπαντα*, Εκδόσεις Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος, τόμοι Α′, Β′, Αθήνα.
Σταμάτης, Ε. (1975), *Απολλώνιου Κωνικά*, Εκδόσεις Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος, τόμος Α′, Αθήνα.
Σταμάτης, Ε. (1979), *Ελληνικά Μαθηματικά*, Εταιρεία των Φίλων του Λαού, Αθήνα.
Wilder, L.R. *Εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών*, The Open University, Π. Κουτσουμπός.
Ψυχογιός, Δ. (2003), *Οι Λέξεις και οι Αριθμοί*, Καστανιώτη, Αθήνα.